Sammenheng mellom konfidensintervall og tosidig hypotesetest

TMA4240/TMA4245 Statistikk

Håkon Tjelmeland
Institutt for matematiske fag
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

Normalpopulasjon, inferens om μ når σ^2 er kjent

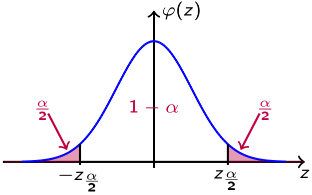
- Situasjon
  - la $X_1, X_2, \ldots, X_n$ være tilfeldig utvalg fra $N(\mu, \sigma^2)$-populasjonen
  - anta μ ukjent, anta σ^2 kjent

- Konfidensintervall
  - Pivotal

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim N(0,1)$$

  - Konfidensintervall

$$\left[\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}, \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right]$$



- Tosidig hypotesetest: $H_0 : \mu = \mu_0$ mot $H_1 : \mu \neq \mu_0$
  - Testobservator:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}, \; Z \sim N(0,1) \text{ når } H_0 \text{ sann}$$

  - Forkastningsregel: Forkast H_0 dersom $Z \leq -z_{\frac{\alpha}{2}}$ eller $Z \geq z_{\frac{\alpha}{2}}$
  - Setter inn uttrykk for Z og løser ulikheter med hensyn på μ_0

$$\text{Forkast } H_0 \text{ dersom } \mu_0 \geq \overline{X} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \text{ eller } \mu_0 \leq \overline{X} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$$

- Merk: Forkaster H_0 hvis μ_0 **ikke** ligger innenfor konfidensintervallet for μ

Normalpopulasjon, inferens om σ^2 når μ er ukjent

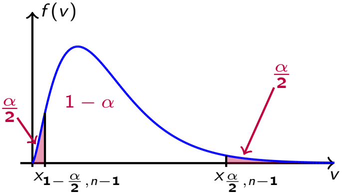
- Situasjon
  - la $X_1, X_2, \ldots, X_n$ være tilfeldig utvalg fra $N(\mu, \sigma^2)$-populasjonen
  - anta σ^2 ukjent, anta μ ukjent

- Konfidensintervall
  - Pivotal

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \overline{X}}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2_{n-1}$$

  - Konfidensintervall

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{x_{\frac{\alpha}{2}, n-1}}, \frac{(n-1)S^2}{x_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}} \right]$$



- Tosidig hypotesetest: $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ mot $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$
  - Testobservator:

$$V = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}, \quad V \sim \chi^2_{n-1} \text{ når } H_0 \text{ sann}$$

  - Forkastningsregel: Forkast H_0 dersom $V \leq x_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$ eller $V \geq x_{\frac{\alpha}{2}, n-1}$
  - Setter inn uttrykk for V og løser ulikheter med hensyn på σ_0^2

$$\text{Forkast } H_0 \text{ dersom } \sigma_0^2 \geq \frac{(n-1)S^2}{x_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}} \text{ eller } \sigma_0^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{x_{\frac{\alpha}{2}, n-1}}$$

- Merk: Forkaster H_0 hvis σ_0^2 **ikke** ligger innenfor konfidensintervallet for σ^2

Oppsummering

- Har sett to situasjoner hvor man i testen $H_0 : \theta = \theta_0$ mot $H_1 : \theta \neq \theta_0$
  - forkaster H_0 hvis θ_0 **ikke** ligger innenfor konfidensintervallet for θ
- Denne sammenhengen gjelder generelt
  - gir alternativ prosedyre for å utføre en tosidig hypotesetest
- Også mulig å definere et ensidig konfidensintervall
  - da tilsvarende sammenheng mellom ensidig konfidensintervall og ensidig hypotesetest