

Sannsynlighet

TMA4240/TMA4245 Statistikk

Håkon Tjelmeland

Institutt for matematiske fag

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

Sannsynlighet

Definisjon (Sannsynlighet)

Et sannsynlighetsmål, P , på et utfallsrom S er en reell funksjon definert på hendelser i S slik at

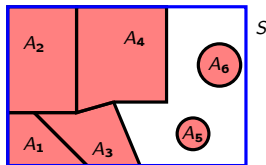
1. $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(S) = 1$
3. dersom $A_1, A_2, \dots$ er parvis disjunkte hendelser, dvs $A_i \cap A_j = \emptyset$ for alle $i \neq j$, så er

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Da kalles (S, P) for et sannsynlighetsrom.

★ Merk:

- $P(A) \in [0, 1]$
- $P(S) = P(\text{sikker hendelse}) = 1$
- for å forstå 3: tenk venndiagram og tolk $P(A)$ som areal av A



★ Spørsmål: $P(\emptyset) = ?$

Hva er $P(\emptyset)$?

$$P(S) = 1$$

$A_1, A_2, \dots$ parvis disjunkte:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

★ Velg: $A_1 = S, A_2 = \emptyset, A_3 = \emptyset, \dots$

$$P(S) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = P(S) + \sum_{i=2}^{\infty} P(\emptyset)$$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{i=2}^{\infty} P(\emptyset) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$P(\emptyset) = 0$$

Union av endelig mange disjunkte hendelser

$A_1, A_2, \dots$ parvis disjunkte:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

$$P(\emptyset) = 0$$

★ Spørsmål: Dersom $A_1, A_2, \dots, A_n$ er parvis disjunkte, hva kan vi si om

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = ?$$

★ Velg: $A_{n+1} = \emptyset, A_{n+2} = \emptyset, \dots$

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i) + \sum_{i=n+1}^{\infty} P(\emptyset) \\ &= \sum_{i=1}^n P(A_i) \end{aligned}$$

★ Spesielt for $n = 2$: Dersom A og B er disjunkte har vi

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Oppsummering

- ★ Har definert begrepet
 - sannsynlighet
- ★ Tolkning av $P(A)$
 - $P(A)$ er arealet av A i venndiagrammet
- ★ Egenskaper vi nå kjenner for $P(\cdot)$
 - $P(A) \in [0, 1]$
 - $P(S) = 1$ og $P(\emptyset) = 0$
 - dersom $A_1, A_2, \dots$ er parvis disjunkte har vi at

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \quad \text{og} \quad P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$