Student t-fordeling

TMA4240/TMA4245 Statistikk

Håkon Tjelmeland
Institutt for matematiske fag
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

Student t-fordeling

Definisjon (t-fordeling)

La Z og V være uavhengige stokastiske variabler, og la $Z \sim N(0,1)$ og $V \sim \chi^2_\nu$. La så T være en stokastisk variabel definert ved

$$T = \frac{Z}{\sqrt{V/\nu}}.$$

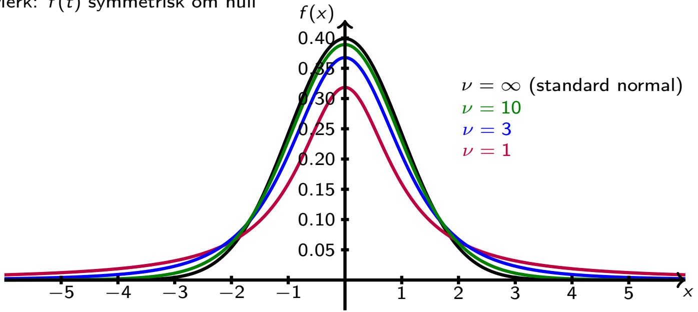
Da sies T å være (Student) t-fordelt med ν frihetsgrader.

Teorem

La T være t-fordelt med ν frihetsgrader. Da er sannsynlighetstettheten til T gitt som

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\sqrt{\pi\nu}}\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}, \quad -\infty < t < \infty.$$

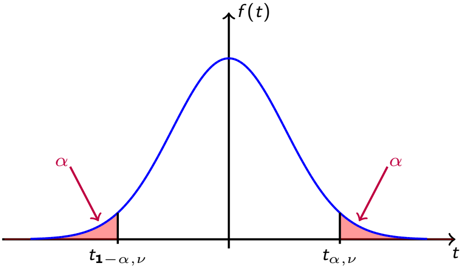
- ⋆ Merk: $f(t)$ symmetrisk om null



Kvantiler i t-fordeling

- Sannsynlighetstetthet for t-fordeling

$$\varphi(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\sqrt{\pi\nu}}\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}, \quad -\infty < t < \infty$$

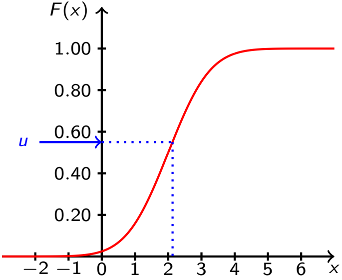


- Ønsker nå å finne en verdi $t_{\alpha,\nu}$ slik at $P(T > t_{\alpha,\nu}) = \alpha$
  - verdien $t_{\alpha,\nu}$ kan finnes i tabell
  - verdien $t_{\alpha,\nu}$ kan finnes ved å kalle en funksjon
- Merk: Siden $f(t)$ er symmetrisk om $t = 0$ får vi at

$$t_{1-\alpha,\nu} = -t_{\alpha,\nu}$$

Simulering fra t-fordeling

- Har tidligere diskutert generell algoritme for å simulere fra en kontinuerlig fordeling



- For t-fordeling
  - har ikke formel for $F(x)$
  - kan ikke finne formel for $F^{-1}(u)$

- Kan simulere $T \sim t_\nu$ ut fra definisjonen

$$T = \frac{Z}{\sqrt{V/\nu}}$$

Simuler $Z \sim N(0,1)$
Simuler $V \sim \chi^2_\nu$
Regn ut $T = Z/\sqrt{V/\nu}$

Oppsummering

- Har definert t-fordeling
- Har formel for $f(t)$
  - $f(t)$ er symmetrisk om $t = 0$
- Har diskutert hvordan man kan
  - finne kvantiler $t_{\alpha,\nu}$ fra tabell
  - simulere verdier fra fordelingen

- Utledet av William Sealy Gosset (1876-1937): Engelsk statistiker, jobbet ved Guinnes bryggeri i Dublin