

# Teststyrke

TMA4240/TMA4245 Statistikk

Håkon Tjelmeland

Institutt for matematiske fag

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

# Hypotesetesting

- ★ To muligheter sannheter/hypoteser:  $H_0$  og  $H_1$
- ★ To mulige konklusjoner
  - forkast  $H_0$ : observerte verdier gir grunnlag for å påstå at  $H_1$  er sann
  - ikke forkaste  $H_0$ : observerte verdier gir ikke grunnlag for å påstå at  $H_1$  er sann
- ★ To type feil

|                    | $H_0$ er sann | $H_1$ er sann |
|--------------------|---------------|---------------|
| Forkast $H_0$      | Type I-feil   | Korrekt       |
| Ikke forkast $H_0$ | Korrekt       | Type II-feil  |

- ★ Setter sannsynligheten for type I-feil lik signifikansnivået,  $\alpha$

$$P(\text{Type I-feil}) = P(\text{Forkast } H_0 | H_0 \text{ sann}) = \alpha$$

- ★ Hva med sannsynligheten for type II-feil?

## Definisjon (Teststyrke)

Anta en hypotesetestingssituasjon hvor vi har formulert  $H_0$  og  $H_1$ , har valgt testobservator og har formulert en beslutningsregel som angir når vi skal forkaste  $H_0$ . En teststyrke er da sannsynligheten for å forkaste  $H_0$  når parameter tar en bestemt verdi der  $H_1$  er sann.

- ★ Formulert matematisk (hypotesetest hvor  $H_0 : \theta = \theta_0$ )
  - sannsynligheten for type II-feil når sann parameterverdi er  $\theta$

$$\beta(\theta) = P(\text{Ikke forkast } H_0 | \theta)$$

- teststyrke når sann parameterverdi er  $\theta$

$$1 - \beta(\theta) = P(\text{Forkast } H_0 | \theta)$$

## Eksempel: Utregning av teststyrke

### ★ Situasjon

- la  $X_1, X_2, \dots, X_n$  være tilfeldig utvalg fra  $N(\mu, \sigma^2)$ -populasjonen
- verdien til  $\mu$  er ukjent, antar verdien til  $\sigma^2$  kjent
- ønsker å teste  $H_0 : \mu = \mu_0$  mot  $H_1 : \mu > \mu_0$

### ★ Tar utgangspunkt i estimator for $\mu$ : $\hat{\mu} = \bar{X}$ , $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

### ★ Standardiserer

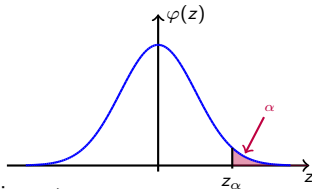
$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim N(0, 1) \text{ alltid (både når } H_0 \text{ er sann og når } H_1 \text{ er sann)}$$

### ★ Testobservator

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}, Z \sim N(0, 1) \text{ når } H_0 \text{ sann}$$

### ★ Forkast $H_0$ dersom $Z \geq z_\alpha$

### ★ Sannsynlighet for type II-feil når sann parameterverdi er $\mu > \mu_0$



$$\beta(\mu) = P(\text{Ikke forkast } H_0 | \mu) = P(Z < z_\alpha | \mu)$$

$$= P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} < z_\alpha \middle| \mu\right) = P\left(\bar{X} < \mu_0 + z_\alpha \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \middle| \mu\right)$$

$$= P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} < \frac{\mu_0 + z_\alpha \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \middle| \mu\right) = P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \leq \frac{\mu_0 + z_\alpha \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \middle| \mu\right)$$

## Eksempel: Utregning av teststyrke

- ★ Situasjon

- la  $X_1, X_2, \dots, X_n$  være tilfeldig utvalg fra  $N(\mu, \sigma^2)$ -populasjonen
- verdien til  $\mu$  er ukjent, antar verdien til  $\sigma^2$  kjent
- ønsker å teste  $H_0 : \mu = \mu_0$  mot  $H_1 : \mu > \mu_0$

- ★ Tar utgangspunkt i estimator for  $\mu$ :  $\hat{\mu} = \bar{X}$ ,  $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

- ★ Standardiserer

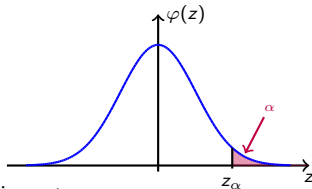
$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim N(0, 1) \text{ alltid (både når } H_0 \text{ er sann og når } H_1 \text{ er sann)}$$

- ★ Testobservator

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}, Z \sim N(0, 1) \text{ når } H_0 \text{ sann}$$

- ★ Forkast  $H_0$  dersom  $Z \geq z_\alpha$

- ★ Sannsynlighet for type II-feil når sann parameterverdi er  $\mu > \mu_0$



$$\beta(\mu) = P(\text{Ikke forkast } H_0 | \mu) = P(Z < z_\alpha | \mu)$$

$$= P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} < z_\alpha \middle| \mu\right) = P\left(\bar{X} < \mu_0 + z_\alpha \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \middle| \mu\right)$$

$$= P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} < \frac{\mu_0 + z_\alpha \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \middle| \mu\right) = \Phi\left(\frac{\mu_0 + z_\alpha \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}\right)$$

## Eksempel: Utregning av teststyrke

$P(A)$ : Andel av gangene hendelsen  $A$  skjer hvis man gjentar det stokastiske forsøket uendelig mange ganger

### ★ Situasjon

- la  $X_1, X_2, \dots, X_n$  være tilfeldig utvalg fra  $N(\mu, \sigma^2)$ -populasjonen
- verdien til  $\mu$  er ukjent, antar verdien til  $\sigma^2$  kjent
- ønsker å teste  $H_0 : \mu = \mu_0$  mot  $H_1 : \mu > \mu_0$

### ★ Sannsynligheten for type II-feil når sann parameterverdi er $\mu > \mu_0$

$$\beta(\mu) = P(\text{Ikke forkast } H_0 | \mu) = \dots = \Phi \left( \frac{\mu_0 + z_\alpha \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \right)$$

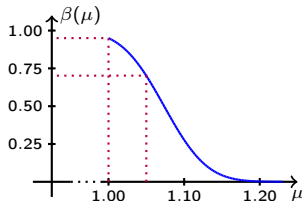
### ★ Anta følgende situasjon

- La  $X_1, X_2, \dots, X_{20}$  være tilfeldig utvalg fra  $N(\mu, 0.2^2)$ -populasjonen
- ønsker å teste  $H_0 : \mu = 1.0$  mot  $H_1 : \mu > 1.0$
- velger signifikansnivå  $\alpha = 0.05$ ,  $z_\alpha = 1.645$

### ★ Når $\mu = 1.05$ får vi

$$\beta(1.05) = \Phi \left( \frac{1 + 1.645 \sqrt{\frac{0.2^2}{20}} - 1.05}{\sqrt{\frac{0.2^2}{20}}} \right) = \Phi(0.53) = 0.7019$$

- hvilken tolkning har tallet 0.7019 her?
- husk tolkning av sannsynlighet
- må tenke oss at vi gjentar forsøket uendelig mange ganger



# Oppsummering

- ★ Har definert begrepet
  - teststyrke
- ★ Har i et eksempel sett hvordan vi kan regne ut
  - sannsynligheten for type II-feil
  - teststyrke
- ★ Vi har diskutert tolkningen av
  - sannsynligheten for type II-feil
  - teststyrke