

Transformasjon av stokastisk variabel

TMA4240/TMA4245 Statistikk

Håkon Tjelmeland

Institutt for matematiske fag

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

Transformasjon

- ★ Anta $X \sim f_X(x)$
 - ★ Definer ny stokastisk variabel $Y = u(X)$
 - $u(\cdot)$ er gitt matematisk funksjon
 - ★ Spørsmål: Hvordan kan vi da finne fordelingen til Y , $f_Y(y)$?
-
- ★ Skal se på tre situasjoner
 1. X og Y er diskrete stokastiske variabler
 2. X og Y er kontinuerte stokastiske variabler og $u(\cdot)$ er strengt monoton
 3. X og Y er kontinuerte stokastiske variabler

Transformasjon av diskrete stokastiske variabler

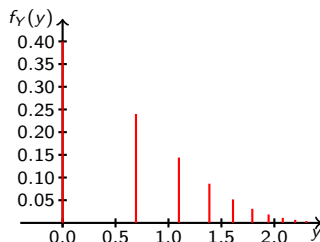
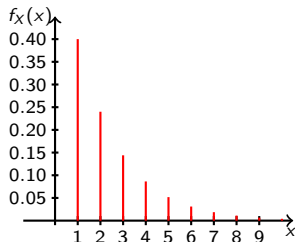
- ★ Anta $X \sim f_X(x)$ diskret stokastisk variabel
- ★ Definer ny stokastisk variabel $Y = u(X)$
 - $u(\cdot)$ er gitt matematisk funksjon
- ★ Spørsmål: Hvordan kan vi da finne fordelingen til Y , $f_Y(y)$?
- ★ Bruk regneregler for sannsynlighet!
- ★ Eksempel:
 - $X \sim \text{geometrisk}(p = 0.4)$

$$f_X(x) = P(X = x) = 0.4 \cdot 0.6^{x-1}, x = 1, 2, \dots$$

- $Y = u(X) = \ln(X)$

- ★ Mulige verdier for Y : $y = 0, \ln(2), \ln(3), \dots$

$$f_Y(y) = P(Y = y) = P(\ln(X) = y) = P(X = e^y) = 0.4 \cdot 0.6^{e^y - 1}, y = 0, \ln(2), \ln(3), \dots$$



Transformasjon av diskrete stokastiske variabler

- ★ Anta $X \sim f_X(x)$ diskret stokastisk variabel
- ★ Definer ny stokastisk variabel $Y = u(X)$
 - $u(\cdot)$ er gitt matematisk funksjon
- ★ Spørsmål: Hvordan kan vi da finne fordelingen til Y , $f_Y(y)$?
- ★ Bruk regneregler for sannsynlighet!
- ★ Eksempel:
 - $X \sim \text{geometrisk}(p = 0.4)$

$$f_X(x) = P(X = x) = 0.4 \cdot 0.6^{x-1}, x = 1, 2, \dots$$

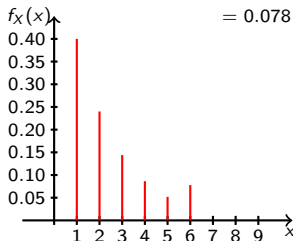
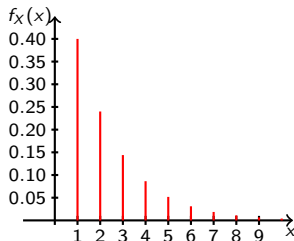
- $Y = u(X) = \min(X, 6)$

- ★ Mulige verdier for Y : $y = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

$$f_Y(y) = P(Y = y) = P(X = y) = 0.4 \cdot 0.6^{y-1}, y = 1, 2, 3, 4, 5,$$

$$f_Y(6) = P(Y = 6) = P(\min(X, 6) = 6) = P(X \geq 6) = 1 - P(X < 6) = 1 - \sum_{x=1}^5 0.4 \cdot 0.6^{x-1}$$

$$= 0.078$$



Kontinuerlige stokastiske variabler, strengt monoton transformasjon

- ★ Anta $X \sim f_X(x)$ kontinuerlig stokastisk variabel
- ★ Definer ny stokastisk variabel $Y = u(X)$
 - $y = u(x)$ er strengt monoton, dvs $y = u(x) \Leftrightarrow x = w(y)$
- ★ Spørsmål: Hvordan kan vi da finne fordelingen til Y , $f_Y(y)$?

Teorem (Transformasjonsformelen)

Anta at X er en kontinuerlig stokastisk variabel med sannsynlighetstthet $f_X(x)$, og la $Y = u(X)$ der $u(x)$ er en strengt monoton funksjon. Sannsynlighetstettheten til Y er da gitt ved

$$f_Y(y) = f_X(w(y)) \cdot |w'(y)|,$$

der $w(y)$ er den inverse funksjonen til $u(x)$, dvs $y = u(x) \Leftrightarrow x = w(y)$.

Bevis (Transformasjonsformelen)

Strengt monoton betyr strengt voksende eller strengt avtagende. Ser på disse to tilfellene hver for seg. Antar først strengt voksende.

$$P(a < Y < b) = P(w(a) < X < w(b))$$

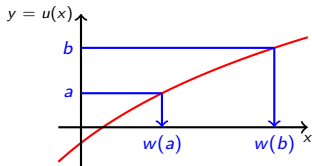
$$\int_a^b f_Y(y) dy = \int_{w(a)}^{w(b)} f_X(x) dx$$

$$\int_a^b f_Y(y) dy = \int_{u(w(a))}^{u(w(b))} f_X(w(y)) \cdot w'(y) dy$$

$$\int_a^b f_Y(y) dy = \int_a^b f_X(w(y)) \cdot w'(y) dy$$

$$f_Y(y) = f_X(w(y)) \cdot w'(y)$$

$$f_Y(y) = f_X(w(y)) \cdot |w'(y)|$$



Substitusjon:

$$x = w(y) \Leftrightarrow y = u(x)$$

$$dx = w'(y)dy$$

Kontinuerlige stokastiske variabler, strengt monoton transformasjon

- ★ Anta $X \sim f_X(x)$ kontinuerlig stokastisk variabel
- ★ Definer ny stokastisk variabel $Y = u(X)$
 - $y = u(x)$ er strengt monoton, dvs $y = u(x) \Leftrightarrow x = w(y)$
- ★ Spørsmål: Hvordan kan vi da finne fordelingen til Y , $f_Y(y)$?

Teorem (Transformasjonsformelen)

Anta at X er en kontinuerlig stokastisk variabel med sannsynlighetstthet $f_X(x)$, og la $Y = u(X)$ der $u(x)$ er en strengt monoton funksjon. Sannsynlighetstettheten til Y er da gitt ved

$$f_Y(y) = f_X(w(y)) \cdot |w'(y)|,$$

der $w(y)$ er den inverse funksjonen til $u(x)$, dvs $y = u(x) \Leftrightarrow x = w(y)$.

Bevis (Transformasjonsformelen)

Strengt monoton betyr strengt voksende eller strengt avtagende. Ser på disse to tilfellene hver for seg. **Antar så at $u(x)$ er strengt avtagende.**

$$P(a < Y < b) = P(w(b) < X < w(a))$$

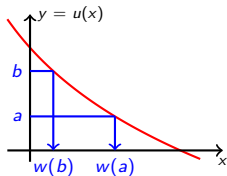
$$\int_a^b f_Y(y) dy = \int_{w(b)}^{w(a)} f_X(x) dx$$

$$\int_a^b f_Y(y) dy = \int_{u(w(b))}^{u(w(a))} f_X(w(y)) \cdot w'(y) dy$$

$$\int_a^b f_Y(y) dy = \int_a^b (-f_X(w(y)) \cdot w'(y)) dy$$

$$f_Y(y) = -f_X(w(y)) \cdot w'(y)$$

$$f_Y(y) = f_X(w(y)) \cdot |w'(y)|$$



Substitusjon:

$$x = w(y) \Leftrightarrow y = u(x)$$

$$dx = w'(y) dy$$

Transformasjon av kontinuerlige stokastiske variabler

★ Anta $X \sim f_X(x)$ kontinuerlig stokastisk variabel

★ Definer ny stokastisk variabel $Y = u(X)$

– $u(\cdot)$ er gitt matematisk funksjon

★ Spørsmål: Hvordan kan vi da finne fordelingen til Y , $f_Y(y)$?

★ Finn først et uttrykk for $F_Y(y) = P(Y \leq y)$

★ Finn deretter $f_Y(y) = F'_Y(y)$

★ Eksempel:

– $X \sim N(0, 1)$, dvs. $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $-\infty < x < \infty$

– $Y = X^2$

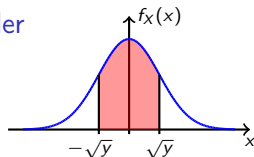
★ Mulige verdier for Y : $[0, \infty)$. Så for $y \geq 0$ har vi

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_X(x) dx$$

$$= \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 2 \int_0^{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 2g(h(y))$$

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = 2g'(h(y)) \cdot h'(y) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\sqrt{y})^2}{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} y^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}}$$



$$g(y) = \int_0^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$
$$h(y) = \sqrt{y}$$

$$g'(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}}$$
$$h'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

χ^2 -distribution:

$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} x^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}$$

Teorem

Anta at $X \sim N(0, 1)$. Da er $X^2 \sim \chi^2_1$.

Oppsummering

- ★ Har sett på situasjonen

- $X \sim f_X(x)$
- la $Y = u(X)$
- hva blir fordelingen til Y , $f_Y(y)$?

- ★ Har sett på tre tilfeller

- X diskret stokastisk variabel
 - bruk regneregler for sannsynlighet
- X kontinuerlig stokastisk variabel og $u(x)$ strengt monoton funksjon
 - transformasjonsformelen
- X kontinuerlig stokastisk variabel og Y kontinuerlig stokastisk variabel
 - finn først uttrykk for $F_Y(y)$