

Type I- og type II-feil, signifikansnivå og beslutningsregel

TMA4240/TMA4245 Statistikk

Håkon Tjelmeland

Institutt for matematiske fag

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

Type I- og type II-feil

- ★ Betrakt en hypotesetestingssituasjon

- to mulige sannheter/hypoteser: H_0 mot H_1
- to mulige konklusjoner: «forkast H_0 » og «ikke forkast H_0 »

- ★ Kan oppsummere disse mulighetene i en tabell

	H_0 er sann	H_1 er sann
Forkast H_0	Type I-feil	Korrekt
Ikke forkast H_0	Korrekt	Type II-feil

- ★ Merk:

- vi kan ikke garantere oss mot feil konklusjon
- kan sørge for lav sannsynlighet for feil konklusjon
- hvilken type feil er mest alvorlig?

- ★ Eksempel:

- interessert i andelen av defekte artikler, p , i et (stort) vareparti
- produsenten lover at andelen defekte artikler er maksimalt $p_0 = 0.02$
- undersøker n tilfeldig valgte artikler
- X : antall av de n undersøkte artiklene som var defekte
- forstår at $X \sim \text{binomisk}(n, p)$
- ønsker å teste $H_0 : p = p_0$ mot $H_1 : p > p_0$

- ★ Mulige feil:

- Type I-feil: Påstå at $p > p_0$ når dette ikke er korrekt
- Type II-feil: Ikke oppdage at $p > p_0$ når p faktisk er større enn p_0

- ★ Anolgi med rettssak:

- Type I-feil: dømme en som er uskyldig
- Type II-feil: frifinne en som er skyldig

Signifikansnivå

- ★ Prinsipp: H_1 skal være «bevist» før vi påstår at H_1 er riktig
 - sannsynligheten for type I-feil skal være liten

Definisjon (Signifikansnivå)

Signifikansnivået til en hypotesetest er sannsynligheten for (feilaktig) å forkaste H_0 når H_0 faktisk er riktig

- ★ Notasjon: Lar α betegne signifikansnivået

$$\alpha = P(\text{Forkaste } H_0 \text{ når } H_0 \text{ er sann}) = P(\text{Forkast } H_0 | H_0 \text{ sann})$$

- ★ Fremgangsmåte for å bestemme beslutningsregel for om man skal forkaste H_0 eller ikke
 - velg verdi for signifikansnivået (typisk $\alpha = 0.01$, 0.05 eller 0.10)
 - bestem beslutningsregel slik at $P(\text{Forkast } H_0 | H_0 \text{ sann}) = \alpha$
- ★ Konkretisering: Regner på et eksempel på neste side

Eksempel: Utledning av hypotesetest

★ Situasjon:

- interessert i gjennomsnittlig systolisk blodtrykk blant kvinner med bestemt sykdom, μ
- ønsker å vite om μ er høyere enn $\mu_0 = 120$ mmHg
- måler blodtrykk hos n kvinner med denne sykdommen
- for måling i : anta $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, og $X_1, X_2, \dots, X_n$ uavhengige
- verdien til μ er ukjent, antar at verdien til σ^2 er kjent
- ønsker å avgjøre om det er grunnlag for å påstå at μ er større enn μ_0

★ Skal teste: $H_0 : \mu = \mu_0$ mot $H_1 : \mu > \mu_0$

★ Velg/konstruer testobservator:

- vi vet at: $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \Rightarrow \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim N(0, 1)$
- velger som testobservator

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}, \quad Z \sim N(0, 1) \text{ når } H_0 \text{ er sann}$$

★ Bestem beslutningsregel: Forkast H_0 hvis $Z \geq k$ (gjenstår å bestemme en verdi for k)

★ Velge signifikansnivå: Velg $\alpha = 0.05$

★ Bestem verdi for k fra kravet

$$P(\text{Forkast } H_0 | H_0 \text{ er sann}) = \alpha$$

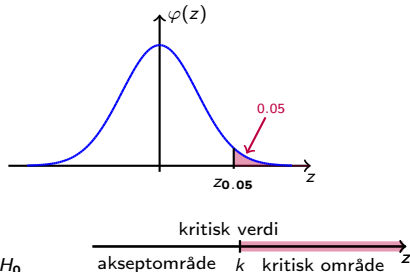
$$P(Z \geq k | H_0 \text{ er sann}) = 0.05$$

$$k = z_{0.05} = 1.645$$

★ Beslutningsregel: Forkast H_0 hvis $Z \geq 1.645$

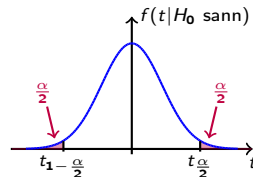
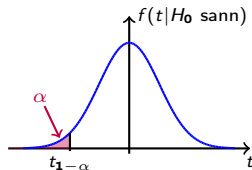
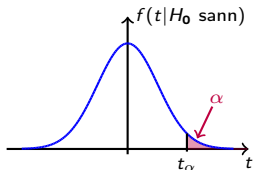
★ Regn ut observert verdi: $z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$

★ $z \geq 1.645$: Forkast H_0 ; $z < 1.645$: Ikke forkast H_0



Utleidning av hypotesetest

- ★ Formulere hypotesene H_0 og H_1
- ★ Velg/konstruer testobservator: T (kjent fordeling når H_0 er sann)
- ★ Bestem beslutningsregel:
 - forkast H_0 hvis $T \geq k$
 - forkast H_0 hvis $T \leq k$
 - forkast H_0 hvis $T \leq k_\ell$ eller $T \geq k_u$
- ★ Velge signifikansnivå α
- ★ Bestem kritisk verdi k (eventuelt k_ℓ og k_u) fra kravet
$$P(\text{Forkast } H_0 | H_0 \text{ er sann}) = \alpha$$
- ★ Skriv opp beslutningsregel: Forkast H_0 hvis ...
- ★ Regn ut observert verdi: t
- ★ Sammenlign observert verdi t med kritisk verdi og konkluder



Oppsummering

- ★ Har diskutert begrepene

- type I- og type II-feil
- signifikansnivå, α
- testobservator, $T = u(X_1, X_2, \dots, X_n)$

- ★ Har diskutert

- at vi velger å kreve at sannsynligheten for type I-feil skal være liten
- utledning av beslutningsregel i et eksempel
- prosedyre for utledning av beslutningsregel