

Uniform sannsynlighetsmodell

TMA4240/TMA4245 Statistikk

Håkon Tjelmeland

Institutt for matematiske fag

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

Uniform sannsynlighetsmodell

$A_1, A_2, \dots, A_n$ parvis disjunkte:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

$$P(S) = 1$$

Definisjon (Uniform sannsynlighetsmodell)

Dersom $S = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ og

$$P(\{e_1\}) = P(\{e_2\}) = \dots = P(\{e_m\}) = w$$

har vi en uniform sannsynlighetsmodell.

★ Merk: La $A_1 = \{e_1\}, A_2 = \{e_2\}, \dots, A_m = \{e_m\}$

$$1 = P(S) = P\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right) = \sum_{i=1}^m P(A_i) = \sum_{i=1}^m P(\{e_i\}) = \sum_{i=1}^m w = mw \quad \Leftrightarrow \quad w = \frac{1}{m}$$

★ La $A = \{e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_g}\}$: hendelse med g enkeltutfall

$$P(A) = P\left(\bigcup_{j=1}^g \{e_{i_j}\}\right) = \sum_{i=1}^g P(\{e_{i_j}\}) = \sum_{i=1}^g \frac{1}{m} = \frac{g}{m}$$

Tolkning av sannsynlighet

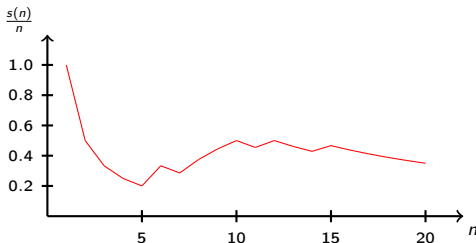
- ★ Eks: Kast terning, registrer antall øyne, $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
 - la $A = \{5, 6\}$, hva betyr det at $P(A) = 1/3$?

- ★ Stokastisk forsøk:

- gjenta forsøket n ganger
- $s(n)$: antall ganger hendelsen A skjer
- relativ hyppighet av A : $\frac{s(n)}{n}$

$$\frac{s(n)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} ??$$

- simulering:

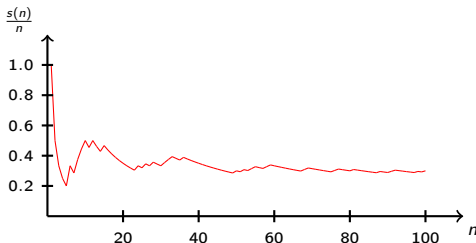


Tolkning av sannsynlighet

- ★ Eks: Kast terning, registrer antall øyne, $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
 - la $A = \{5, 6\}$, hva betyr det at $P(A) = 1/3$?
- ★ Stokastisk forsøk:
 - gjenta forsøket n ganger
 - $s(n)$: antall ganger hendelsen A skjer
 - relativ hyppighet av A : $\frac{s(n)}{n}$

$$\frac{s(n)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} ??$$

- simulering:

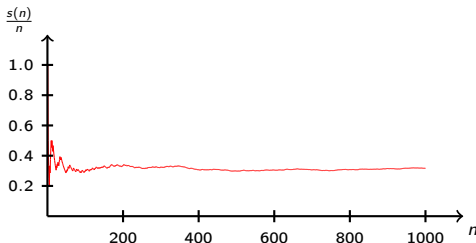


Tolkning av sannsynlighet

- ★ Eks: Kast terning, registrer antall øyne, $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
 - la $A = \{5, 6\}$, hva betyr det at $P(A) = 1/3$?
- ★ Stokastisk forsøk:
 - gjenta forsøket n ganger
 - $s(n)$: antall ganger hendelsen A skjer
 - relativ hyppighet av A : $\frac{s(n)}{n}$

$$\frac{s(n)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P(A)$$

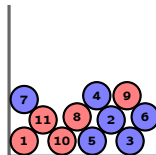
- simulering:



Urnemodell

- ★ Antar: Har urne med n kuler

- kulene er identifiserbare
- trekker r kuler
- lik sannsynlighet for alle kuler
- trekker *med* tilbakelegging eller *uten* tilbakelegging
- er interessert i *ordnet utvalg* eller i *ikke-ordnet utvalg*



- ★ Har dermed fire muligheter:

- ordnet utvalg, trekker uten tilbakelegging
- ordnet utvalg, trekker med tilbakelegging
- ikke-ordnet utvalg, trekker uten tilbakelegging
- ikke-ordnet utvalg, trekker med tilbakelegging

- ★ I alle tilfeller får vi en uniform sannsynlighetsmodell slik at

$$P(A) = \frac{g}{m}$$

- ★ Eks:

- har $n = 11$ kuler
- fem kuler er røde og resten er blå
- trekker $r = 6$ kuler uten tilbakelegging
- hva er sannsynligheten for at vi trekker nøyaktig 3 røde kuler?

$$P(A) = \frac{g}{m}$$

- vi forstår at g og m er store tall, vi kan ikke liste opp alle muligheter og telle
- vi trenger *telleregler* — kombinatorikk

Oppsummering

- ★ Har definert begrepene
 - uniform sannsynlighetsmodell
 - urnemodell

- ★ For uniform sannsynlighetsmodell fant vi at

$$P(A) = \frac{g}{m}$$

- ★ I en urnemodell blir ofte g og m svært store
 - ikke overkommelig å liste opp alle muligheter
 - trenger telleregler (kombinatorikk) for å finne g og m
- ★ To tolkninger av $P(A)$
 - $P(A)$ er arealet av A i venndiagrammet
 - $P(A)$ er andelen av gangene A skjer når vi gjentar forsøket uendelig mange ganger