

26/4-23

August 23

3

22,5

$$\textcircled{1} \int_a^b 2x dx = x^2 \Big|_a^b = b^2 - a^2$$
$$= 0,75^2 - 0,25^2 \approx 0,50$$

$$EX = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3} x^3 \Big|_0^1 = 2/3$$
$$\approx 0,67$$

$$\text{Var } X = E(X - \mu)^2 = EX^2 - \mu^2$$

$$EX^2 = \int_0^1 2x^3 dx = \frac{2}{4} x^4 \Big|_0^1 = 1/2$$

$$\text{Var } X = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} \approx 0,06$$

$$\text{Std } X = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{4}{9}} \approx 0,2357$$
$$\approx 0,24$$

$$\frac{1}{2} = \int_0^m 2x \, dx = x^2 \Big|_0^m = m^2$$

$$\text{Median}(X) = \sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0,71$$

$$\textcircled{3} \quad \chi^2_v = \text{Gamma}(v/2, 2)$$

a) ~~707s~~ (Exp(β)) ~~11min~~
~~47sek~~
~~.00~~

$$b) \int_0^\beta \beta^{-1} e^{-t/\beta} dt = -e^{-t/\beta} \Big|_0^\beta$$

$$= -e^{-1} + 1 \approx 0,63 = p$$

c) $P(X \geq 8)$ $X \sim B(n, p)$

$$n=10$$

$$= 1 - P(X \leq 7) \underset{\text{tbl}}{\approx} 1 - 0,833 \approx 0,17 \approx 0,2$$

Length integrating:

$$P(X \geq 8) = \binom{10}{8} \cdot p^8 \cdot (1-p)^2$$

$$+ \binom{10}{9} \cdot p^9 \cdot (1-p)^1 + \binom{10}{10} p^{10}$$

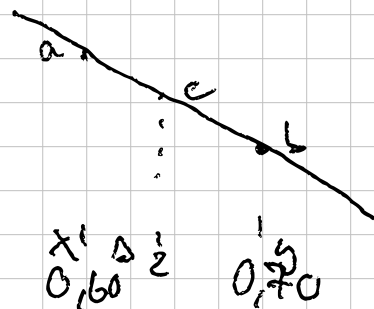
$$= \frac{10 \cdot 9}{2} \cdot p^8 \cdot (1-p)^2 + 10 \cdot p^9 \cdot (1-p) + p^{10}$$

$$= 0,2247$$

$$\approx \underline{\underline{0.22}}$$

$$\frac{10!}{8!2!}$$

$$= \frac{a-b}{y-x} = \frac{10!}{9!1!} = 10$$



$$1 - \left(0,833 \cdot \frac{7}{10} + 0,617 \cdot \frac{3}{10} \right) \approx \underline{\underline{0,23}}$$

$$c = (y-z) \cdot \frac{a-b}{y-x} + b = a \cdot \frac{y-z}{y-x} + b \cdot \left(1 - \frac{y-z}{y-x} \right)$$

$$\begin{aligned}
 d) \quad P(T > t) &= \int_t^{\infty} \frac{1}{\beta} e^{-t/\beta} dt \\
 &= -e^{-t/\beta} \Big|_t^{\infty} = e^{-t/\beta} = e^{-\frac{5 \cdot 60}{707}} \\
 &\approx 0,65 //
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e) \quad \text{Var } V &= 10 \cdot \text{Var } T = 10 \beta^2 \\
 \text{Std } V &= \sqrt{10} \beta = \sqrt{10} \cdot 707 \text{ s} \approx \\
 &\quad 2235,73 \text{ s}
 \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{37 \text{ min}}} \quad \underline{\underline{15,73 \text{ s}}}$$

$$f) V \sim G(\alpha, \beta) \quad \alpha = n = 10$$

$$\left(\chi^2_v = G(v/2, 2) \right)$$

$$V \sim \beta/2 \cdot G(\alpha, 2)$$

$$\sim \beta/2 \cdot \chi^2_v$$

$$v = 2\alpha \\ = 20$$

$$P(V > v) = P\left(\chi^2_v > \frac{2v}{\beta}\right)$$

$$= \alpha_{0,95}, \quad \underset{\text{tabel}}{X_{\alpha}} = 10,851 = \frac{2v}{\beta}$$

$$\Rightarrow v = \frac{X_{\alpha} \cdot \beta}{2} \approx 3835,83 \text{ s}$$

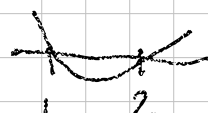
1 time 3 min 55,83 s //

(2)

$$a) P(Z < 0,75) = 0,7734 \\ \approx 0,77$$

$$b) P(Z^2 > 1,69) = P(|Z| > 1,3) \\ = 2 \cdot P(Z > 1,3) = 2 \cdot (1 - 0,9032) \\ = 0,19$$

$$c) 2 \cdot P(1,1 < Z < 1,5) \\ = 2 \cdot (0,9332 - 0,8643) = 0,14$$

$$d) Z^2 - 3Z + 2 < 0$$

$$Z_{\pm} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}$$

$$P(1 < Z < 2) = 0,9772 - 0,8413 \\ \approx \underline{\underline{0,14}}$$

$$e) \int_{0,5}^{1,5} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= \sqrt{2\pi} \cdot [0,9332 - 0,6715] \approx \underline{\underline{0,61}}$$

(4)

a) Antar $X_i = \mu_x + \sigma_x Z_i$
hvor

$$E(Z_i) = 0, \text{Std}(Z_i) = 1$$

Leddene $\sigma_x Z_i$ er målefeilene i
måling nummer i . Antar at
 μ_x er like lengden $\tilde{x}$ til
pendelen. Da er

$$E\bar{X} = \mu_x = \tilde{x}$$

Så $\bar{X}$ er et forventningsrett
estimat for lengden $\tilde{x}$.

Uavhengighet gir

$$\text{Var } \bar{X} = \frac{1}{n_x} \sigma_x^2, \text{Std } \bar{X} = \frac{1}{\sqrt{n_x}} \sigma_x$$

Dette begrunner at $\bar{x}$ kan
være en f. rett estimator for
lengden. Tilsvarende begrunnelse
gjelder for $\bar{y}$.

Standardvikterhater

$$u_x = \frac{1}{\sqrt{n_x}} \cdot S_x = \frac{1}{\sqrt{20}} \cdot 4.4978 \text{ cm} \approx 1.0037 \text{ cm}$$

$$u_y = \frac{1}{\sqrt{44}} \cdot 11.6327 \text{ cm} \approx 1.7537 \text{ cm}$$

begrunner at estimatoren $\bar{x}$
er best.

[Sammenligning av estimat av
varianser kan også godkjennes.]

④ a)

Det kan finnes systematiske feil som gir $\mu_x \neq \tilde{\mu}$.

Da er $\bar{x}$ ikke f.rett, men fortsatt et estimat for $\tilde{\mu}$.

Tilsvarende gjelder for $\bar{y}$.

b) Antar $\mu_x = \tilde{\mu}$, uavhengighet og $z_i \sim N(0, 1)$. Da er

$$(\bar{x} - \tilde{\mu}) / u_x \sim t_{n_x - 1}$$

Dette gir utvidet usikkerhet

$$k \cdot u_x = t_{\alpha/2, n_x - 1} \cdot u_x$$
$$\stackrel{\text{Tab.}}{=} 2.093 \cdot 1.057 \text{ cm} \approx 2.1050 \text{ cm}$$

$$): [25.24 \text{ m}, 25.28 \text{ m}] //$$

b) Svaret kan også skrives

$$\bar{x} = 25.26(2) \text{ cm}$$

hvor tallet i parentes gir
utvidet usikkerhet tilsvarende
et 95% konfidensintervall.
Dette er da slik ISO GUM
standarden krever.

c) Antar som i b.). Intervallet
inneholder ikke μ_0 , så H_0
forkastes i en test med nivå
 $\alpha = 5\%$.

[Alternativt via testobservator
 $(\bar{x} - \mu_0)/\sigma_x$ etc.]

(4)

c) Observeret testobservatør

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s_x} = \frac{26.04}{1.0057} \approx 25.8914$$

p-verdi ved tosidig test:

$$p = 2 \cdot P(T_{19} > t)$$

$$< 2 \cdot P(T_{19} > 3.883) = 2 \cdot 0.005$$

$$= 1\%$$

viser at p-verdien er mindre enn 1%. Konklusjonen er at H_0 også forkastes ved nivå like 1%.

[Kan sjekkes ved 99% intervall]

d) $H_0: \mu_x = \mu_y$, $H_1: \mu_x \neq \mu_y$
Utfører test ved å beregne
et 99% intervall for $\mu_x - \mu_y$.
Estimat er

$$\hat{\Delta} = \hat{\mu}_x - \hat{\mu}_y = 26.04 \text{ cm} - 20.36 \text{ cm} \\ = 5.68 \text{ cm}$$

Standard usikkerhet

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \sqrt{S_x^2/n_x + S_y^2/n_y} \\ \approx 2.0216 \text{ cm}$$

$k = 2.576$ ved normaltilnærming
(se senere diskusjon) gir

$$k \cdot u \approx 5.2077 \text{ cm} < \hat{\Delta}$$

$\therefore H_0$ forkastes ved 1% nivå

d) Konklusjonen er at estimatene er signifikant forskjellige ved 1% nivå (fordi CI for Δ ikke inneholder 0.)

Intervall og testen er basert på approksimasjonen

$$\hat{\Delta}/n \sim N(0, 1)$$

En bedre approksimasjon (gitt i lærebok) er

$$\hat{\Delta}/n \sim t_v$$

hvor v er effektivt 'antall' frihetsgrader.

d) v er bestemt ved

$$u^4/v = u_x^4/v_x + u_y^4/v_y$$

$$v \approx \frac{2,0216^4}{1,0057^4/19 + 1,7537^4/43}$$

≈ 61

Antal frihedsgrader er så
stort at tidligere normaltilnærming
er begæret.

4) e)

$$L_x = \prod_{i=1}^{n_x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(x_i - \mu_x)^2}{2\sigma_x^2}}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \right)^{n_x} \cdot \left[\exp \left[-\frac{(x - x_i)^2 + (\bar{x} - \mu)^2}{\sigma_x^2} \right] \right]^{\frac{n_x}{2}}$$

Maks til $L_x \cdot L_y$ ved minimer til

$$\frac{n_x}{\sigma_x^2} \cdot (\bar{x} - \mu)^2 + \frac{n_y}{\sigma_y^2} \cdot (\bar{y} - \mu)^2$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \mu} = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_x^2} + \frac{\bar{y} - \mu}{\sigma_y^2}$$

$$\hat{\mu} = \left[\frac{\bar{x}}{\sigma_x^2} + \frac{\bar{y}}{\sigma_y^2} \right] \cdot \left[\frac{1}{\sigma_x^2} + \frac{1}{\sigma_y^2} \right]^{-1}$$

hvor midlertidig $u_x = \sigma_x / \sqrt{n_x}$ og
 $u_y = \sigma_y / \sqrt{n_y}$.

④ e) Når standardavvikene er ukjente erstattes disse av estimatene s_x og s_y .

Resulterende estimat:

$$\hat{\mu} = \left[\frac{25.2604m}{4.4778^2/20} + \frac{25.2036m}{11.6327^2/44} \right] \cdot \left[\frac{1}{\cdot} + \frac{1}{\cdot} \right]^{-1}$$

$$\approx 25.2463m \approx 25.25m$$

Når σ_x og σ_y regnes kjente:

$$E(w_x \bar{X} + w_y \bar{Y}) = (w_x + w_y) \cdot \mu = \mu$$

så f.rett. Bedre fordi:

$$\text{Var}(\cdot) = w_x^2 \cdot \sigma_x^2 + w_y^2 \cdot \sigma_y^2 < \min(\sigma_x^2, \sigma_y^2)$$

④ e) Siste påstand følger ved :

$$0 = \partial_w [w^2 u_x^2 + (1-w)^2 u_y^2]$$

$$= 2w u_x^2 - 2 \cdot (1-w) u_y^2$$

$$0 = w \cdot (u_x^2 + u_y^2) - u_y^2$$

$$w = \frac{u_y^2}{u_x^2 + u_y^2} = \frac{1}{u_x^2} \cdot \left[\frac{1}{u_x^2} + \frac{1}{u_y^2} \right]^{-1}$$

som gir at vektoren funnet tidligere minimerer standard usikkerhet (når σ_x og σ_y er kjent.).