



Bokmål

Faglig kontakt under eksamen:
Ingelin Steinsland 92 66 30 96

EKSAMEN I EMNE TMA4240/4245 STATISTIKK

11. august 2012

Tid: 09:00–13:00

Hjelpemidler: *Tabeller og formler i statistikk*, Tapir Forlag
K. Rottmann: *Matematisk formelsamling*
Kalkulator HP30S
Gult, stemplet A5-ark med egne håndskrevne notater.

Oppgave 1

La X angi lengden av et tilfeldig spydkast for en spydkaster. Det antas at kastlengden X er en normalfordelt stokastisk variabel med forventningsverdi μ og standardavvik σ . (Vi ser i denne oppgaven bort fra at et spydkast kan bli underkjent, for eksempel ved at utøveren trår på eller over tilløpsstreken.)

Vi antar i punkt a) og b) at $\mu = 85$ meter og at sannsynligheten for at spydkasteren kaster spydet over 88 meter er 0.1.

- a) Benytt de gitte opplysningene til å vise at standardavviket for kastlengden til spydkasteren blir $\sigma \approx 2.34$ meter.

Hva blir sannsynligheten for at spydkasteren kaster over 90 meter i et tilfeldig kast?

I en konkurranse har spydkasteren totalt seks forsøk. Det lengste av de seks kastene blir spydkasterens sluttresultat. Det antas at de seks forsøkene er uavhengige.

- b) Hva er sannsynligheten for at spydkasteren kaster over 88 meter i minst tre av de seks kastene?

Hva er sannsynligheten for at det lengste kastet blir over 88 meter?

Vi antar nå at spydkasteren er med i en konkurranse der lengden av spydkastene fremdeles kan sees på som uavhengige og normalfordelte variabler, men nå med ukjent forventning og ukjent standardavvik.

Resultatet av de fem første kastene (målt i meter) til spydkasteren ble

86.8, 84.4, 88.3, 90.6, 85.4.

- c) Hva blir gjennomsnittet og empirisk standardavvik for de fem kastene?
- d) Formulér hypoteser og utfør en hypotesetest for å undersøke om forventet kastlengde kan sies å være lengre enn 85 meter. Hva blir konklusjonen av testen ut fra de fem kastene? Benytt signifikansnivå 0.05.
- e) Forklar kort forskjellen mellom et konfidensintervall og et prediksjonsintervall. Benytt de gitte observasjonene og finn et 95% intervallestimat for spydkasterens siste kast i konkurransen.

Oppgave 2

I forbindelse med varsling av flom, klimaforskning og særlig kraftproduksjon er det viktig å kunne anslå hvor mye vann som er inneholdt i snø. Dette avhenger av dybden til snøen og av tettheten til snøen. I denne oppgaven ser vi på dybden av snøen.

Vi har tilgjengelig snødybder målt mellom 1976 og 2006 ved Rybekken og Sylsjødammen i Tydalen kommune i Sør-Trøndelag.

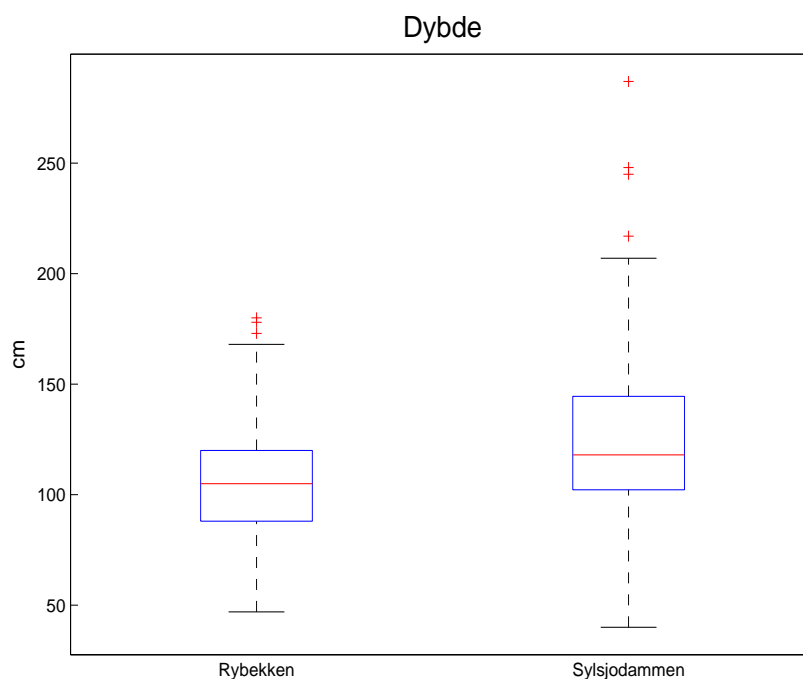
- a) I Figur 1 er det boksploTT av de tilgjengelige dataene. Basert på boksploTTene, vurder om dybdemålingene kommer fra normalfordelinger, om forventet snødybde ved Rybekken og Sylsjødammen er like, og om det er lik varians for snødybdene i de to måleområdene. Begrunn svarene dine kort.

Oppgave 3

Vi skal undersøke forekomsten av kobolt i et område og har derfor tilfeldig valgt ut 50 like store jordprøver og bestemt koboltinnholdet (målt i mg) i disse.

La X_i betegne koboltinnholdet i prøve nr. i ; $i = 1, 2, \dots, 50$. Vi forutsetter at X_i 'ene er uavhengige og identisk fordelte med sannsynlighetstetthet $f_X(x) = e^{-x/\beta}/\beta$ for $x \geq 0$ ($\beta > 0$).

Vi antar at $\beta = 4$ i punkt a).



Figur 1: Boksplott av snødybde.

a) Hva er sannsynligheten for at en prøve inneholder mer enn 2 mg kobolt?

Hva blir den forventede mengde kobolt i en prøve?

Hvis vi tar bort de prøvene som inneholder mindre enn 2 mg kobolt, hva er da sannsynligheten for at en tilfeldig gjenværende prøve inneholder mindre enn 4 mg kobolt?

Hva blir den forventede mengden kobolt i en slik prøve?

I det følgende skal vi anta at β er ukjent.

b) Som estimator for β er det foreslått å bruke $\bar{X} = \frac{1}{50} \sum_{i=1}^{50} X_i$

Vis at dette er sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren for β , og finn estimatorens forventning og varians.

c) Hvilket resultat kan brukes for å begrunne at \bar{X} er tilnærmet normalfordelt?

Vis da hvordan et tilnærmet 95% konfidensintervall for β kan bestemmes.

Hva blir intervallet hvis gjennomsnittet av de 50 prøvene viser seg å være 5.2 mg?

- d) Vis at $Y = 2X/\beta$ er χ^2 -fordelt med 2 frihetsgrader.
Bestem et eksakt 95% konfidensintervall for β når prøvene er de samme som i punkt c).