# i Forside august 2021

**Institutt for matematiske fag**

**Eksamensoppgave i TMA4240/TMA4245 Statistikk**

**Eksamensdato:** Fredag 13. august, 2021

**Eksamenstid (fra-til):** 09.00 – 13.00

**Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler:** A / Alle hjelpemidler tillatt

**Faglig kontakt under eksamen:** Håkon Tjelmeland
**Tlf.:** 48221896

**Teknisk hjelp under eksamen:** NTNU Orakel
**Tlf:** 73 59 16 00

Får du tekniske problemer underveis i eksamen, må du ta kontakt for teknisk hjelp snarest mulig, og senest innen eksamenstida løper ut. Kommer du ikke gjennom umiddelbart, hold linja til du får svar.

**ANNEN INFORMASJON:**

**Gjør dine egne antagelser** og presiser i besvarelsen hvilke forutsetninger du har lagt til grunn i tolkning/avgrensing av oppgaven. Faglig kontaktperson skal kun kontaktes dersom det er direkte feil eller mangler i oppgavesettet.

**Juks/plagiat**: Eksamen skal være et individuelt, selvstendig arbeid. Det er tillatt å bruke hjelpemidler. Under eksamen er det ikke tillatt å kommunisere med andre personer om oppgaven eller å distribuere utkast til svar. Slik kommunikasjon er å anse som juks.
Alle besvarelser blir kontrollert for plagiat. *Du kan lese mer om juks og plagiering på eksamen her.*

**Varslinger**: Hvis det oppstår behov for å gi beskjeder til kandidatene underveis i eksamen (f.eks. ved feil i oppgavesettet), vil dette bli gjort via varslinger i Inspera. Et varsel vil dukke opp som en dialogboks på skjermen i Inspera. Du kan finne igjen varselet ved å klikke på bjella øverst i høyre hjørne på skjermen. Det vil i tillegg bli sendt SMS til alle kandidater for å sikre at ingen går glipp av viktig informasjon. Ha mobiltelefonen din tilgjengelig.

**Vekting av oppgavene**: Vekting av oppgavene er spesifisert på hver enkelt oppgave.

**Generell informasjon:** I oppgave 1 til 5 skal dere kun oppgi korrekt svar og ingen begrunnelse. Bruk flere desimaler i mellomregninger enn i det endelige svaret for å unngå avrundingsfeil. **Følg instruksene for antall desimaler i endelig svar. Hvis ikke kan svaret bli vurdert til feil!** For oppgave 6 til 11 skal alle svar begrunnes og all naturlig mellomregning skal inkluderes. Det må være helt tydelig hvordan man har gått frem for å komme frem til svarene. Løsningene av disse oppgavene skal være håndskrevet.

**OM LEVERING:** En del av oppgavene krever at du laster opp filer med din løsning. Du skal laste opp en (og bare en) fil for hver av disse oppgavene. Alle filene må være i pdf-format! **Det anbefales sterkt at man laster opp en løsning straks man er ferdig med en oppgave. Man bør ikke laste opp alle løsningene helt på slutten av eksamenstiden, da dette lett kan føre til tekniske problemer.**

**Slik svarer du på oppgavene:** Alle oppgaver som *ikke* er av typen filopplasting, skal besvares direkte i Inspera. I Inspera lagres svarene dine automatisk hvert 15. sekund.
NB! Klipp og lim fra andre programmer frarådes, da dette kan medføre at formatering og elementer (bilder, tabeller etc.) vil kunne gå tapt.

**Filopplasting:** Alle filer må være lastet opp i besvarelsen før eksamenstida går ut. Det er lagt til 30 minutter til ordinær eksamenstid for eventuell digitalisering av håndtegninger og opplasting av filer. (Tilleggstida inngår i gjenstående eksamenstid som vises øverst til venstre på skjermen.)

NB! Det er ditt eget ansvar å påse at du laster opp riktig(e) fil(er). Kontroller filene du har lastet opp ved å klikke "Last ned" når du står i filopplastingsoppgaven. Alle filer kan fjernes og byttes ut så lenge prøven er åpen.

*Slik digitaliserer du eventuelle håndtegninger*
*Slik lagrer du dokumentet ditt som PDF.*
*Slik fjerner du forfatterinformasjon fra filen(e) du skal levere.*

**Besvarelsen din leveres automatisk når eksamenstida er ute og prøven stenger**, forutsatt at minst én oppgave er besvart. Dette skjer selv om du ikke har klikket «Lever og gå tilbake til Dashboard» på siste side i oppgavesettet. Du kan gjenåpne og redigere besvarelsen din så lenge prøven er åpen. Dersom ingen oppgaver er besvart ved prøveslutt, blir ikke besvarelsen din levert. Dette vil anses som "ikke møtt" til eksamen.

**Trekk fra eksamen:** Blir du syk under eksamen, eller av andre grunner ønsker å levere blankt/trekke deg, gå til "hamburgermenyen" i øvre høyre hjørne og velg «Lever blankt». Dette kan ikke angres selv om prøven fremdeles er åpen.

**Tilgang til besvarelse:** Du finner besvarelsen din i Arkiv etter at sluttida for eksamen er passert.

1 **1A**

**Innledning:** Vi observerer et tilfeldig utvalg bestående av tallene -1, 2, 3, 7, 9.

**Oppgave:** Regn ut følgende. Oppgi svarene som desimaltall med to siffer etter komma.

- Utvalgets gjennomsnitt:
- Utvalgsvariansen (empirisk varians):
- Medianen:

Maks poeng: 5

2 **1B**

**Innledning:** Vi observerer et tilfeldig utvalg bestående av tallene 9, 12, 13, 17, 19.

**Oppgave:** Regn ut følgende. Oppgi svarene som desimaltall med to siffer etter komma.

- Utvalgets gjennomsnitt:
- Utvalgsvariansen (empirisk varians):
- Medianen:

Maks poeng: 5

## 3 1C

**Innledning:** Vi observerer et tilfeldig utvalg bestående av tallene -1, 2, 10, 11, 13.

**Oppgave:** Regn ut følgende. Oppgi svarene som desimaltall med to siffer etter komma.

- Utvalgets gjennomsnitt:
- Utvalgsvariansen (empirisk varians):
- Medianen:

Maks poeng: 5

## 4 1D

**Innledning:** Vi observerer et tilfeldig utvalg bestående av tallene 0, 4, 5, 8, 8.

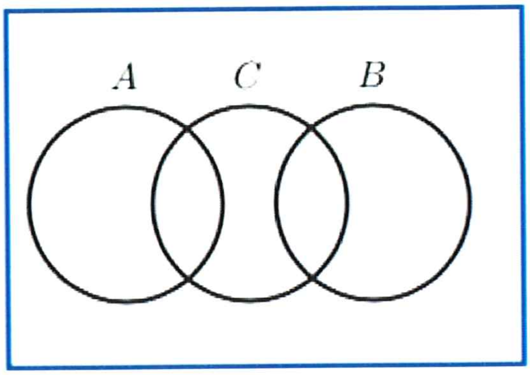
**Oppgave:** Regn ut følgende. Oppgi svarene som desimaltall med to siffer etter komma.

- Utvalgets gjennomsnitt:
- Utvalgsvariansen (empirisk varians):
- Medianen:

Maks poeng: 5

5 **2A**

**Innledning**: La $A$, $B$ og $C$ være tre hendelser i et utfallsrom $S$, der hendelsene $A$ og $B$ er disjunkte. Hendelsene kan dermed illustreres ved et venndiagram som på følgende figur.




La videre følgende sannsynligheter være gitt:

- $P(A) = 0.08$
- $P(B) = 0.20$
- $P(C|A) = 0.25$
- $P(C|B) = 0.50$
- $P(A|C) = 0.10$

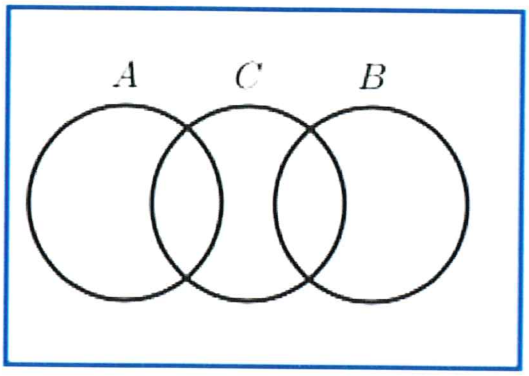
**Oppgave**: Finn følgende sannsynligheter. Angi svarene som desimaltall med tre siffer etter komma.

- $P(B \cap C) =$
- $P(C) =$
- $P(B|A \cup C) =$

Maks poeng: 5

# 2B

**Innledning**: La $A$, $B$ og $C$ være tre hendelser i et utfallsrom $S$, der hendelsene $A$ og $B$ er disjunkte. Hendelsene kan dermed illustreres ved et venndiagram som på følgende figur.




.

La videre følgende sannsynligheter være gitt:

- $P(A) = 0.40$
- $P(B) = 0.20$
- $P(C|A) = 0.25$
- $P(C|B) = 0.20$
- $P(A|C) = 0.20$

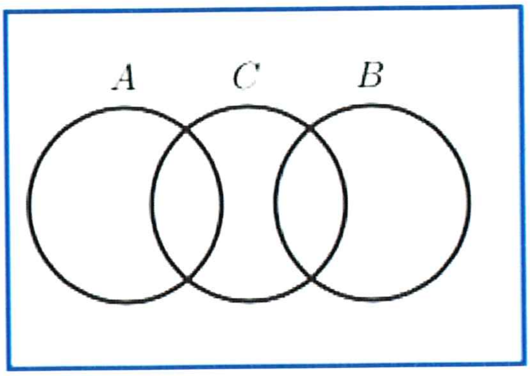
**Oppgave**: Finn følgende sannsynligheter. Angi svarene som desimaltall med tre siffer etter komma.

- $P(B \cap C) =$
- $P(C) =$
- $P(B|A \cup C) =$

Maks poeng: 5

7 **2C**

**Innledning**: La $A$, $B$ og $C$ være tre hendelser i et utfallsrom $S$, der hendelsene $A$ og $B$ er disjunkte. Hendelsene kan dermed illustreres ved et venndiagram som på følgende figur.




La videre følgende sannsynligheter være gitt:

- $P(A) = 0.10$
- $P(B) = 0.25$
- $P(C|A) = 0.90$
- $P(C|B) = 0.10$
- $P(B|C) = 0.20$

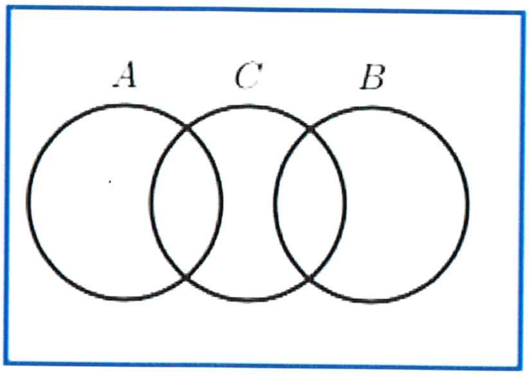
**Oppgave**: Finn følgende sannsynligheter. Angi svarene som desimaltall med tre siffer etter komma.

- $P(A \cap C) =$
- $P(C) =$
- $P(A|B \cup C) =$

Maks poeng: 5

# 2D

**Innledning**: La $A$, $B$ og $C$ være tre hendelser i et utfallsrom $S$, der hendelsene $A$ og $B$ er disjunkte. Hendelsene kan dermed illustreres ved et venndiagram som på følgende figur.




.

La videre følgende sannsynligheter være gitt:

- $P(A) = 0.50$
- $P(B) = 0.10$
- $P(C|A) = 0.20$
- $P(C|B) = 0.05$
- $P(B|C) = 0.10$

**Oppgave**: Finn følgende sannsynligheter. Angi svarene som desimaltall med tre siffer etter komma.

- $P(A \cap C) =$
- $P(C) =$
- $P(A|B \cup C) =$

Maks poeng: 5

## 9 3A

**Innledning**: Anta at vi gjentatte ganger trekker en kule **med tilbakelegging** fra en urne med 4 røde og 16 blå kuler. Anta at vi for hver trekning noterer oss fargen på kula vi trakk før vi legger kula tilbake i urna.

**Oppgave**: Når vi regner hver kule som unik, på hvor mange måter kan vi

- trekke 5 kuler slik at man trekker ut en rød kule for første gang på trekning nummer 5? Angi svaret som et heltall.
- trekke 7 kuler slik at man trekker ut en rød kule for fjerde gang på trekning nummer 7? Angi svaret som et heltall.

Maks poeng: 5

## 10 3B

**Innledning**: Anta at vi gjentatte ganger trekker en kule **med tilbakelegging** fra en urne med 5 røde og 13 blå kuler. Anta at vi for hver trekning noterer oss fargen på kula vi trakk før vi legger kula tilbake i urna.

**Oppgave**: Når vi regner hver kule som unik, på hvor mange måter kan vi

- trekke 6 kuler slik at man trekker ut en rød kule for første gang på trekning nummer 6? Angi svaret som et heltall.
- trekke 8 kuler slik at man trekker ut en rød kule for tredje gang på trekning nummer 8? Angi svaret som et heltall.

Maks poeng: 5

## 11 3C

**Innledning**: Anta at vi gjentatte ganger trekker en kule **med tilbakelegging** fra en urne med 6 røde og 16 blå kuler. Anta at vi for hver trekning noterer oss fargen på kula vi trakk før vi legger kula tilbake i urna.

**Oppgave**: Når vi regner hver kule som unik, på hvor mange måter kan vi

- trekke 4 kuler slik at man trekker ut en rød kule for første gang på trekning nummer 4? Angi svaret som et heltall.
- trekke 6 kuler slik at man trekker ut en rød kule for femte gang på trekning nummer 6? Angi svaret som et heltall.

Maks poeng: 5

## 12 4A

**Innledning**: La $X$ være en diskret stokastisk variabel med punktsannsynlighet $f(x)$ som gitt i følgende tabell.

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0.05 | 0.15 | 0.10 | 0.25 | 0.20 | 0.25 |

**Oppgave**: Finn følgende størrelser. Oppgi svarene som desimaltall med tre siffer etter komma.

- $P(X > 1) =$
- $P(X \leq 4 | X \geq 3) =$
- $\mathrm{E}[X] =$

Maks poeng: 5

13 **4B**

**Innledning**: La $X$ være en diskret stokastisk variabel med punktsannsynlighet $f(x)$ som gitt i følgende tabell.

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0.10 | 0.15 | 0.20 | 0.25 | 0.15 | 0.15 |

**Oppgave**: Finn følgende størrelser. Oppgi svarene som desimaltall med tre siffer etter komma.

- $P(X > 1) =$ ☐
- $P(X \leq 4 | X \geq 3) =$ ☐
- $\mathrm{E}[X] =$ ☐

Maks poeng: 5

# 4C

**Innledning**: La $X$ være en diskret stokastisk variabel med punktsannsynlighet $f(x)$ som gitt i følgende tabell.

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0.05 | 0.15 | 0.10 | 0.25 | 0.20 | 0.25 |

**Oppgave**: Finn følgende størrelser. Oppgi svarene som desimaltall med tre siffer etter komma.

- $P(X > 2) =$
- $P(X < 5 | X \geq 1) =$
- $\mathrm{E}[X] =$

Maks poeng: 5

## 15 4D

**Innledning**: La $X$ være en diskret stokastisk variabel med punktsannsynlighet $f(x)$ som gitt i følgende tabell.

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0.10 | 0.15 | 0.20 | 0.25 | 0.15 | 0.15 |

**Oppgave**: Finn følgende størrelser. Oppgi svarene som desimaltall med tre siffer etter komma.

- $P(X > 2) =$ ☐
- $P(X < 5 | X \geq 1) =$ ☐
- $\mathrm{E}[X] =$ ☐

Maks poeng: 5

## 16 5A

**Innledning:** Anta at $X$ er eksponentielt fordelt og at $\mathrm{Var}(X) = 1/9$.

**Oppgave:** Beregn følgende størrelser. Oppgi svarene som desimaltall med tre siffer etter komma.

- $E(X)$: ☐
- $P(X > 1)$: ☐
- $P(X \leq 0.5 | X < 1.1)$: ☐

Maks poeng: 5

## 17 5B

**Innledning:** Anta at $X$ er eksponentielt fordelt og at $\mathrm{Var}(X) = 1/16.$

**Oppgave:** Beregn følgende størrelser. Oppgi svarene som desimaltall med tre siffer etter komma.

- $E(X)$:
- $P(X > 1)$:
- $P(X \leq 0.5 | X < 1.1)$:

Maks poeng: 5

## 18 5C

**Innledning:** Anta at $X$ er eksponentielt fordelt og at $\mathrm{Var}(X) = 1/4.$

**Oppgave:** Beregn følgende størrelser. Oppgi svarene som desimaltall med tre siffer etter komma.

- $E(X)$:
- $P(X > 1)$:
- $P(X \leq 0.5 | X < 1.1)$:

Maks poeng: 5

19 **6A**

**Innledning**: La $X$ og $Y$ være uavhengige og normalfordelte stokastiske variabler, der $X$ har forventningsverdi lik $\mu$ og varians lik $\sigma^2$, mens $Y$ har forventningsverdi lik $2\mu$ og varians lik $4\sigma^2$.

Anta at verdien til parameteren $\mu$ er ukjent og at vi ønsker å estimere denne verdien basert på $X$ og $Y$. Følgende tre estimatorer for $\mu$ er foreslått,

$$\widehat{\mu} = \frac{X+Y}{2}, \qquad \mu^{\star} = \frac{2X+Y}{4} \qquad \text{og} \qquad \widetilde{\mu} = \frac{3X+Y}{5}.$$

**Oppgave**: Hvilken av de tre foreslåtte estimatorene $\widehat{\mu}$, $\mu^{\star}$ og $\widetilde{\mu}$ vil du foretrekke? Begrunn svaret.

**Merk**: Du skal her laste opp en pdf-fil som inneholder bilde(r) av din **håndskrevne** løsning av oppgaven. Ved sensurering av denne oppgaven vil det bli lagt vekt på at besvarelsen er **fornuftig og logisk ført** og at utregningen inneholder **all naturlig mellomregning**.

**Last opp filen her. Maks én fil.**

Alle filtyper er tillatt. Maksimal filstørrelse er **50 GB**.

Velg fil for opplasting

Maks poeng: 10

20 **6B**

**Innledning**: La $X$ og $Y$ være uavhengige og normalfordelte stokastiske variabler, der $X$ har forventningsverdi lik $\mu$ og varians lik $\sigma^2$, mens $Y$ har forventningsverdi lik $2\mu$ og varians lik $4\sigma^2$.

Anta at verdien til parameteren $\mu$ er ukjent og at vi ønsker å estimere denne verdien basert på $X$ og $Y$. Følgende tre estimatorer for $\mu$ er foreslått,

$$\widehat{\mu} = \frac{2X+Y}{4}, \qquad \mu^\star = \frac{3X+Y}{5} \qquad \text{og} \qquad \widetilde{\mu} = \frac{X+Y}{2}.$$

**Oppgave**: Hvilken av de tre foreslåtte estimatorene $\widehat{\mu}$, $\mu^\star$ og $\widetilde{\mu}$ vil du foretrekke? Begrunn svaret.

**Merk**: Du skal her laste opp en pdf-fil som inneholder bilde(r) av din **håndskrevne** løsning av oppgaven. Ved sensurering av denne oppgaven vil det bli lagt vekt på at besvarelsen er **fornuftig og logisk ført** og at utregningen inneholder **all naturlig mellomregning**.

**Last opp filen her. Maks én fil.**

Alle filtyper er tillatt. Maksimal filstørrelse er **50 GB**.

Velg fil for opplasting

Maks poeng: 10

21 **6C**

**Innledning**: La $X$ og $Y$ være uavhengige og normalfordelte stokastiske variabler, der $X$ har forventningsverdi lik $\mu$ og varians lik $\sigma^2$, mens $Y$ har forventningsverdi lik $2\mu$ og varians lik $4\sigma^2$.

Anta at verdien til parameteren $\mu$ er ukjent og at vi ønsker å estimere denne verdien basert på $X$ og $Y$. Følgende tre estimatorer for $\mu$ er foreslått,

$$\widehat{\mu} = \frac{3X+Y}{5}, \qquad \mu^\star = \frac{X+Y}{2} \qquad \text{og} \qquad \widetilde{\mu} = \frac{2X+Y}{4}.$$

**Oppgave**: Hvilken av de tre foreslåtte estimatorene $\widehat{\mu}$, $\mu^\star$ og $\widetilde{\mu}$ vil du foretrekke? Begrunn svaret.

**Merk**: Du skal her laste opp en pdf-fil som inneholder bilde(r) av din **håndskrevne** løsning av oppgaven. Ved sensurering av denne oppgaven vil det bli lagt vekt på at besvarelsen er **fornuftig og logisk ført** og at utregningen inneholder **all naturlig mellomregning**.

**Last opp filen her. Maks én fil.**

Alle filtyper er tillatt. Maksimal filstørrelse er **50 GB**.

Velg fil for opplasting

Maks poeng: 10

22 **7A**

**Innledning**: La $X$ og $Y$ være kontinuerlige stokastiske variabler med simultan sannsynlighetstetthet

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4}\exp\{-\left[x + \frac{1}{2}|y-x|\right]\} & \text{for } x > 0, -\infty < y < \infty, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

**Oppgave**: Finn følgende fordelinger:

- Marginalfordelingen til $X$.
- Den betingede fordelingen til $Y$ gitt at $X = x$.

**Merk**: Du skal her laste opp en pdf-fil som inneholder bilde(r) av din **håndskrevne** løsning av oppgaven. Ved sensurering av denne oppgaven vil det bli lagt vekt på at besvarelsen er **fornuftig og logisk ført** og at utregningen inneholder **all naturlig mellomregning**.

**Last opp filen her. Maks én fil.**

Alle filtyper er tillatt. Maksimal filstørrelse er **50 GB**.

Velg fil for opplasting

Maks poeng: 10

## 23 7B

**Innledning**: La $X$ og $Y$ være kontinuerlige stokastiske variabler med simultan sannsynlighetstetthet

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4}\exp\{-\left[\frac{1}{2}x + |y-x|\right]\} & \text{for } x > 0, -\infty < y < \infty, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

**Oppgave**: Finn følgende fordelinger:

- Marginalfordelingen til $X$.
- Den betingede fordelingen til $Y$ gitt at $X = x$.

**Merk**: Du skal her laste opp en pdf-fil som inneholder bilde(r) av din **håndskrevne** løsning av oppgaven. Ved sensurering av denne oppgaven vil det bli lagt vekt på at besvarelsen er **fornuftig og logisk ført** og at utregningen inneholder **all naturlig mellomregning**.

**Last opp filen her. Maks én fil.**

Alle filtyper er tillatt. Maksimal filstørrelse er **50 GB**.

Velg fil for opplasting

Maks poeng: 10

# 24 7C

**Innledning**: La $X$ og $Y$ være kontinuerlige stokastiske variabler med simultan sannsynlighetstetthet

$$f(x,y) = \begin{cases} 2\exp\{-2\,[x + |y - x|]\} & \text{for } x > 0, -\infty < y < \infty, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

**Oppgave**: Finn følgende fordelinger:

- Marginalfordelingen til $X$.
- Den betingede fordelingen til $Y$ gitt at $X = x$.

**Merk**: Du skal her laste opp en pdf-fil som inneholder bilde(r) av din **håndskrevne** løsning av oppgaven. Ved sensurering av denne oppgaven vil det bli lagt vekt på at besvarelsen er **fornuftig og logisk ført** og at utregningen inneholder **all naturlig mellomregning**.

**Last opp filen her. Maks én fil.**

Alle filtyper er tillatt. Maksimal filstørrelse er **50 GB**.

Velg fil for opplasting

Maks poeng: 10

25 **8A**

**Innledning:** Anta at vi observer et tilfeldig utvalg bestående av $n = 6$ observasjoner 1, 5, 2, 10, 15, 3 fra en geometrisk fordeling med punktsannsynlighet

$$f(x) = (1-p)^{x-1}p \text{ for } x = 1, 2, \ldots,$$

der $p \in (0, 1)$ er en parameter.

**Oppgave:**

- Finn sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren for $p$ og beregn estimatet for dataene gitt over.
- Finn også sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren $\hat{\theta}$ for $\theta = 1/p$.
- Undersøk om $\hat{\theta}$ er forventningsrett for $\theta$.

**Merk**: Du skal her laste opp en pdf-fil som inneholder bilde(r) av din **håndskrevne** løsning av oppgaven. Ved sensurering av denne oppgaven vil det bli lagt vekt på at besvarelsen er **fornuftig og logisk ført** og at utregningen inneholder **all naturlig mellomregning**.

**Last opp filen her. Maks én fil.**

Alle filtyper er tillatt. Maksimal filstørrelse er **50 GB**.

Velg fil for opplasting

Maks poeng: 10

## 26 8B

**Innledning:** Anta at vi observer et tilfeldig utvalg bestående av $n = 5$ observasjoner 5, 15, 13, 4, 17 fra en geometrisk fordeling med punktsannsynlighet

$$f(x) = (1-p)^{x-1}p \text{ for } x = 1, 2, \ldots,$$

der $p \in (0, 1)$ er en parameter.

**Oppgave:**

- Finn sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren for $p$ og beregn estimatet for dataene gitt over.
- Finn også sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren $\hat{\theta}$ for $\theta = 1/p$.
- Undersøk om $\hat{\theta}$ er forventningsrett for $\theta$.

**Merk**: Du skal her laste opp en pdf-fil som inneholder bilde(r) av din **håndskrevne** løsning av oppgaven. Ved sensurering av denne oppgaven vil det bli lagt vekt på at besvarelsen er **fornuftig og logisk ført** og at utregningen inneholder **all naturlig mellomregning**.

**Last opp filen her. Maks én fil.**

Alle filtyper er tillatt. Maksimal filstørrelse er **50 GB**.

Velg fil for opplasting

Maks poeng: 10

27 **8C**

**Innledning:** Anta at vi observer et tilfeldig utvalg bestående av $n = 7$ observasjoner 2, 5, 4, 4, 1, 9, 5 fra en geometrisk fordeling med punktsannsynlighet

$$f(x) = (1-p)^{x-1}p \text{ for } x = 1, 2, \dots,$$

der $p \in (0, 1)$ er en parameter.

**Oppgave:**

- Finn sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren for $p$ og beregn estimatet for dataene gitt over.
- Finn også sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren $\hat{\theta}$ for $\theta = 1/p$.
- Undersøk om $\hat{\theta}$ er forventningsrett for $\theta$.

**Merk**: Du skal her laste opp en pdf-fil som inneholder bilde(r) av din **håndskrevne** løsning av oppgaven. Ved sensurering av denne oppgaven vil det bli lagt vekt på at besvarelsen er **fornuftig og logisk ført** og at utregningen inneholder **all naturlig mellomregning**.

**Last opp filen her. Maks én fil.**

Alle filtyper er tillatt. Maksimal filstørrelse er **50 GB**.

Velg fil for opplasting

Maks poeng: 10

# 9A

**Innledning**: La $X$ være en kontinuerlig stokastisk variabel med sannsynlighetstetthet

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{12}(x+3) & \text{for } x \in (-2,2), \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

**Oppgave**: Finn sannsynligheten $P\left(X^2 - \frac{9X}{4} > -\frac{7}{8}\right)$. *Hint: Finn først for hvilke verdier av $X$ ulikheten er oppfylt.*

**Merk**: Du skal her laste opp en pdf-fil som inneholder bilde(r) av din **håndskrevne** løsning av oppgaven. Ved sensurering av denne oppgaven vil det bli lagt vekt på at besvarelsen er **fornuftig og logisk ført** og at utregningen inneholder **all naturlig mellomregning**.

**Last opp filen her. Maks én fil.**

Alle filtyper er tillatt. Maksimal filstørrelse er **50 GB**.

Velg fil for opplasting

Maks poeng: 10

29 **9B**

**Innledning**: La $X$ være en kontinuerlig stokastisk variabel med sannsynlighetstetthet

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{50}(x+5) & \text{for } x \in (-5,5), \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

**Oppgave**: Finn sannsynligheten $P\left(X^2 - \frac{9X}{4} > -\frac{7}{8}\right)$. *Hint: Finn først for hvilke verdier av $X$ ulikheten er oppfylt.*

**Merk**: Du skal her laste opp en pdf-fil som inneholder bilde(r) av din **håndskrevne** løsning av oppgaven. Ved sensurering av denne oppgaven vil det bli lagt vekt på at besvarelsen er **fornuftig og logisk ført** og at utregningen inneholder **all naturlig mellomregning**.

**Last opp filen her. Maks én fil.**

Alle filtyper er tillatt. Maksimal filstørrelse er **50 GB**.

Velg fil for opplasting

Maks poeng: 10

## 30 9C

**Innledning**: La $X$ være en kontinuerlig stokastisk variabel med sannsynlighetstetthet

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{12}(x+3) & \text{for } x \in (-2,2), \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

**Oppgave**: Finn sannsynligheten $P\left(X^2 - 3X > -\frac{5}{4}\right)$. *Hint: Finn først for hvilke verdier av* $X$ *ulikheten er oppfylt.*

**Merk**: Du skal her laste opp en pdf-fil som inneholder bilde(r) av din **håndskrevne** løsning av oppgaven. Ved sensurering av denne oppgaven vil det bli lagt vekt på at besvarelsen er **fornuftig og logisk ført** og at utregningen inneholder **all naturlig mellomregning**.

**Last opp filen her. Maks én fil.**

Alle filtyper er tillatt. Maksimal filstørrelse er **50 GB**.

Velg fil for opplasting

Maks poeng: 10

## 31 9D

**Innledning**: La $X$ være en kontinuerlig stokastisk variabel med sannsynlighetstetthet

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{50}(x+5) & \text{for } x \in (-5, 5), \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

**Oppgave**: Finn sannsynligheten $P\left(X^2 - 3X > -\frac{5}{4}\right)$. *Hint: Finn først for hvilke verdier av $X$ ulikheten er oppfylt.*

**Merk**: Du skal her laste opp en pdf-fil som inneholder bilde(r) av din **håndskrevne** løsning av oppgaven. Ved sensurering av denne oppgaven vil det bli lagt vekt på at besvarelsen er **fornuftig og logisk ført** og at utregningen inneholder **all naturlig mellomregning**.

**Last opp filen her. Maks én fil.**

Alle filtyper er tillatt. Maksimal filstørrelse er **50 GB**.

Velg fil for opplasting

Maks poeng: 10

## 32 10A

**Innledning:** En etablert vaksine gir immunitet mot en kjent virusinfeksjon blant 90% av de vaksinerte. Et legemiddelfirma har utviklet en ny vaksine og de ønsker å undersøke om den nye vaksinen er mer effektiv enn vaksinen som allerede er i bruk, altså om andelen av populasjonen som blir immune ved bruk av den nye vaksinen er høyere enn blant de som får den gamle vaksinen. De undersøker dette ved å undersøke 1000 forsøkspersoner vaksinert med den nye vaksinen for forekomst av antistoffer mot viruset. Anta at legemiddelfirmaet finner antistoffer hos $x = 912$ av forsøkspersonene og at vi dermed kan konkludere med at disse har oppnådd immunitet.

**Oppgave:**

**a)**

- Formuler og begrunn en statistisk modell for fordelingen til dataene i forsøket.
- Formuler hva som er nullhypotese og alternativ hypotese i situasjonen beskrevet over.
- Finn en testobservator og forklar hvorfor fordelingen til denne under nullhypotesen kan tilnærmes med en normalfordeling.
- Hva blir testens forkastningsområde hvis vi bruker et signifikansnivå på 5%. Hva blir testens konklusjon?

**b)**

- Anta at den nye vaksinen i realiteten gir immunitet hos 92% av de vaksinerte. Utled et tilnærmet uttrykk for sannsynligheten for at vi vil forkaste nullhypotesen gitt at vi utfører forsøket over. Bestem tallverdien til denne sannsynligheten.
- Hvor mange forsøkspersoner må inngå i forsøket for at teststyrken skal bli minst 80%, igjen gitt at den nye vaksinen gir immunitet blant 92% av de vaksinerte.

**Merk**: Du skal her laste opp en pdf-fil som inneholder bilde(r) av din **håndskrevne** løsning av oppgaven. Ved sensurering av denne oppgaven vil det bli lagt vekt på at besvarelsen er **fornuftig og logisk ført** og at utregningen inneholder **all naturlig mellomregning**.

**Last opp filen her. Maks én fil.**

Alle filtyper er tillatt. Maksimal filstørrelse er **50 GB**.

Velg fil for opplasting

Maks poeng: 20

33 **10B**

**Innledning:** En etablert vaksine gir immunitet mot en kjent virusinfeksjon blant 80% av de vaksinerte. Et legemiddelfirma har utviklet en ny vaksine og de ønsker å undersøke om den nye vaksinen er mer effektiv enn vaksinen som allerede er i bruk, altså om andelen av populasjonen som blir immune ved bruk av den nye vaksinen er høyere enn blant de som får den gamle vaksinen. De undersøker dette ved å undersøke 1000 forsøkspersoner vaksinert med den nye vaksinen for forekomst av antistoffer mot viruset. Anta at legemiddelfirmaet finner antistoffer hos $x = 815$ av forsøkspersonene og at vi dermed kan konkludere med at disse har oppnådd immunitet.

**Oppgave:**

a)

- Formuler og begrunn en statistisk modell for fordelingen til dataene i forsøket.
- Formuler hva som er nullhypotese og alternativ hypotese i situasjonen beskrevet over.
- Finn en testobservator og forklar hvorfor fordelingen til denne under nullhypotesen kan tilnærmes med en normalfordeling.
- Hva blir testens forkastningsområde hvis vi bruker et signifikansnivå på 1%. Hva blir testens konklusjon?

b)

- Anta at den nye vaksinen i realiteten gir immunitet hos 83% av de vaksinerte. Utled et tilnærmet uttrykk for sannsynligheten for at vi vil forkaste nullhypotesen gitt at vi utfører forsøket over. Bestem tallverdien til denne sannsynligheten.
- Hvor mange forsøkspersoner må inngå i forsøket for at teststyrken skal bli minst 80%, igjen gitt at den nye vaksinen gir immunitet blant 83% av de vaksinerte.

**Merk**: Du skal her laste opp en pdf-fil som inneholder bilde(r) av din **håndskrevne** løsning av oppgaven. Ved sensurering av denne oppgaven vil det bli lagt vekt på at besvarelsen er **fornuftig og logisk ført** og at utregningen inneholder **all naturlig mellomregning**.

**Last opp filen her. Maks én fil.**

Alle filtyper er tillatt. Maksimal filstørrelse er **50 GB**.

Velg fil for opplasting

Maks poeng: 20

## 34 10C

**Innledning:** En etablert vaksine gir immunitet mot en kjent virusinfeksjon blant 95% av de vaksinerte. Et legemiddelfirma har utviklet en ny vaksine og de ønsker å undersøke om den nye vaksinen er mer effektiv enn vaksinen som allerede er i bruk, altså om andelen av populasjonen som blir immune ved bruk av den nye vaksinen er høyere enn blant de som får den gamle vaksinen. De undersøker dette ved å undersøke 1000 forsøkspersoner vaksinert med den nye vaksinen for forekomst av antistoffer mot viruset. Anta at legemiddelfirmaet finner antistoffer hos $x = 961$ av forsøkspersonene og at vi dermed kan konkludere med at disse har oppnådd immunitet.

**Oppgave:**

**a)**

- Formuler og begrunn en statistisk modell for fordelingen til dataene i forsøket.
- Formuler hva som er nullhypotese og alternativ hypotese i situasjonen beskrevet over.
- Finn en testobservator og forklar hvorfor fordelingen til denne under nullhypotesen kan tilnærmes med en normalfordeling.
- Hva blir testens forkastningsområde hvis vi bruker et signifikansnivå på 5%. Hva blir testens konklusjon?

**b)**

- Anta at den nye vaksinen i realiteten gir immunitet hos 96% av de vaksinerte. Utled et tilnærmet uttrykk for sannsynligheten for at vi vil forkaste nullhypotesen gitt at vi utfører forsøket over. Bestem tallverdien til denne sannsynligheten.
- Hvor mange forsøkspersoner må inngå i forsøket for at teststyrken skal bli minst 80%, igjen gitt at den nye vaksinen gir immunitet blant 96% av de vaksinerte.

**Merk**: Du skal her laste opp en pdf-fil som inneholder bilde(r) av din **håndskrevne** løsning av oppgaven. Ved sensurering av denne oppgaven vil det bli lagt vekt på at besvarelsen er **fornuftig og logisk ført** og at utregningen inneholder **all naturlig mellomregning**.

**Last opp filen her. Maks én fil.**

Alle filtyper er tillatt. Maksimal filstørrelse er **50 GB**.

Velg fil for opplasting

Maks poeng: 20

35 **11A**

**Innledning:** Anta at vi observerer et tilfeldig utvalg bestående av $n = 2$ observasjoner $X_1, X_2$ fra en normalfordeling med ukjent forventning og varians.

**Oppgave:**

- Utled et $(1 - \alpha)$-prediksjonsintervall for en ny observasjon $X_3$.
- Beregn intervallet gitt at observasjonene er 2 og 5 og for $1 - \alpha = 1/3$. Det oppgis at (den øvre) 0.3333-kvantilen til en *t*-fordelt stokastisk variabel med én frihetsgrad er $t_{1,\frac{1}{3}} = 1/\sqrt{3} = 0.57735$.
- Kommenter om intervallet du har beregnet virker rimelig.

**Merk**: Du skal her laste opp en pdf-fil som inneholder bilde(r) av din **håndskrevne** løsning av oppgaven. Ved sensurering av denne oppgaven vil det bli lagt vekt på at besvarelsen er **fornuftig og logisk ført** og at utregningen inneholder **all naturlig mellomregning**.

**Last opp filen her. Maks én fil.**

Alle filtyper er tillatt. Maksimal filstørrelse er **50 GB**.

Velg fil for opplasting

Maks poeng: 15

# 11B

**Innledning:** Anta at vi observerer et tilfeldig utvalg bestående av $n = 2$ observasjoner $X_1, X_2$ fra en normalfordeling med ukjent forventning og varians.

**Oppgave:**

- Utled et $(1-\alpha)$-prediksjonsintervall for en ny observasjon $X_3$.
- Beregn intervallet gitt at observasjonene er 12 og 15 og for $1-\alpha = 1/3$. Det oppgis at (den øvre) 0.3333-kvantilen til en *t*-fordelt stokastisk variabel med én frihetsgrad er $t_{1,\frac{1}{3}} = 1/\sqrt{3} = 0.57735$.
- Kommenter om intervallet du har beregnet virker rimelig.

**Merk**: Du skal her laste opp en pdf-fil som inneholder bilde(r) av din **håndskrevne** løsning av oppgaven. Ved sensurering av denne oppgaven vil det bli lagt vekt på at besvarelsen er **fornuftig og logisk ført** og at utregningen inneholder **all naturlig mellomregning**.

**Last opp filen her. Maks én fil.**

Alle filtyper er tillatt. Maksimal filstørrelse er **50 GB**.

Velg fil for opplasting

Maks poeng: 15

37 **11C**

**Innledning:** Anta at vi observerer et tilfeldig utvalg bestående av $n = 2$ observasjoner $X_1, X_2$ fra en normalfordeling med ukjent forventning og varians.

**Oppgave:**

- Utled et $(1-\alpha)$-prediksjonsintervall for en ny observasjon $X_3$.
- Beregn intervallet gitt at observasjonene er 1 og 6 og for $1-\alpha = 1/3$. Det oppgis at (den øvre) 0.3333-kvantilen til en *t*-fordelt stokastisk variabel med én frihetsgrad er $t_{1,\frac{1}{3}} = 1/\sqrt{3} = 0.57735$.
- Kommenter om intervallet du har beregnet virker rimelig.

**Merk**: Du skal her laste opp en pdf-fil som inneholder bilde(r) av din **håndskrevne** løsning av oppgaven. Ved sensurering av denne oppgaven vil det bli lagt vekt på at besvarelsen er **fornuftig og logisk ført** og at utregningen inneholder **all naturlig mellomregning**.

**Last opp filen her. Maks én fil.**

Alle filtyper er tillatt. Maksimal filstørrelse er **50 GB**.

Velg fil for opplasting

Maks poeng: 15