

i Institutt for matematiske fag**Eksamensoppgave i TMA4240/TMA4245 Statistikk****Eksamensdato:** 11. august 2022**Eksamenstid (fra-til):** 09.00-13.00**Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler:** Hjelpemiddelkode C.

- Tabeller og formler i statistikk (Fagbokforlaget).
- Et gult ark (A5 med stempel) med egne håndskrevne formler og notater.
- Bestemt, enkel kalkulator.

Faglig kontakt under eksamen: Håkon Tjelmeland**Tlf.:** 4822 1896**ANNEN INFORMASJON:****Skaff deg overblikk over oppgavesettet** før du begynner på besvarelsen din.**Generell informasjon:**

- I oppgavene 1 til 4 skal du kun oppgi korrekt svar (altså uten begrunnelse) direkte i Inspira. Følg instruksene i oppgaveteksten angående antall desimaler i svaret, hvis ikke kan svaret bli vurdert som feil. I alle mellomregninger må du bruke minst to desimaler mer enn hva du skal ha i svaret.
- I oppgavene 5 til 7 skal alle svar begrunnes og besvarelsen skal inneholde mellomregning slik at det er helt klart hvordan man har tenkt. Besvarelsen på disse oppgavene skal skrives for hånd på utleverte ark, se informasjon under InspiraScan lenger ned på denne siden.

Les oppgavene nøye, gjør dine egne antagelser og presiser i besvarelsen hvilke forutsetninger du har lagt til grunn i tolkning/avgrensing av oppgaven. Faglig kontaktperson skal kun kontaktes dersom det er direkte feil eller mangler i oppgavesettet. Henvend deg til en eksamensvakt hvis du ønsker å kontakte faglærer. Noter gjerne spørsmålet ditt på forhånd.

InspiraScan: Besvarelsen av oppgave 5, 6 og 7 skal skrives for hånd på utleverte ark. Nederst i hver oppgave finner du en sjusifret kode. Fyll inn denne koden øverst til venstre på arkene du ønsker å levere. Det anbefales å gjøre dette underveis i eksamen. Dersom du behøver tilgang til kodene etter at eksamenstiden har utløpt, må du klikke «Vis besvarelse».

Vekting av oppgavene: Vekt ved sensur for hver deloppgave er angitt i oppgavesettet.

Varslinger: Hvis det oppstår behov for å gi beskjeder til kandidatene underveis i eksamen (f.eks. ved feil i oppgavesettet), vil dette bli gjort via varslinger i Inspira. Et varsel vil dukke opp som en dialogboks på skjermen. Du kan finne igjen varselet ved å klikke på bjella øverst til høyre.

Trekk fra/avbrutt eksamen: Blir du syk under eksamen, eller av andre grunner ønsker å levere blankt/avbryte eksamen, gå til "hamburgermenyen" i øvre høyre hjørne og velg «Lever blankt». Dette kan ikke angres selv om prøven fremdeles er åpen.

Tilgang til besvarelse: Etter eksamen finner du besvarelsen din i arkivet i Inspira. Merk at det kan ta én virkedag før eventuelle håndtegninger vil være tilgjengelige i arkivet.

1 Innledning: La A , B og C være tre hendelser i et utfallsrom S . Følgende sannsynligheter er oppgitt,

- $P(A) = 0.500$,
- $P(B) = 0.400$,
- $P(C) = 0.300$,
- $P(A \cap B) = 0.300$,
- $P(C|(A \cup B)') = 0.200$,

hvor $(A \cup B)' = S \setminus (A \cup B)$ som vanlig betegner komplementet til hendelsen $A \cup B$.

Oppgave: Bestem følgende sannsynligheter. Angi svarene med tre desimaler etter komma.

- $P(A \cup B) =$
- $P(B|A) =$
- $P(C|A \cup B) =$

Maks poeng: 5

- 2 Innledning:** La X og Y være uavhengige normalfordelte stokastiske variabler. Anta videre at X har forventningsverdi lik 1 og standardavvik lik 4 , mens Y har forventningsverdi lik -2 og standardavvik lik 2 .

Oppgave: Regn ut følgende sannsynligheter. Angi svarene med fire desimaler etter komma.

- $P(X > 4) =$
- $P(X + 2Y < 0) =$
- $P(Y - X \leq 4 | Y - X > -3) =$

Maks poeng: 5

- 3 **Innledning:** La $X_1, X_2, \dots, X_n$ være et tilfeldig utvalg fra en fordeling med forventningsverdi μ og varians σ^2 . Basert på dette utvalget er følgende to stokastiske variabler definert,

$$U = \sum_{i=1}^n a_i (X_i - \mu),$$

$$V = \frac{\sum_{i=1}^n a_i X_i}{\sum_{i=1}^n a_i},$$

hvor $a_1, a_2, \dots, a_n$ er konstanter.

Oppgave: Finn uttrykk for variansene til U og V . Angi under hva som er det korrekte uttrykket for hver av de to variansene.

Velg ett alternativ

- ☐ $\text{Var}[U] = \sigma^2 \sum_{i=1}^n a_i$
- ☐ $\text{Var}[U] = (\sigma^2 - \mu) \sum_{i=1}^n a_i^2$
- ☐ $\text{Var}[U] = \sigma^2 \sum_{i=1}^n a_i^2$
- ☐ $\text{Var}[U] = (\sigma - \mu)^2 \sum_{i=1}^n a_i^2$
- ☐ $\text{Var}[U] = (\sigma^2 - \mu^2) \sum_{i=1}^n a_i^2$

Velg ett alternativ

- ☐ $\text{Var}[V] = \sigma^2 \cdot \frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{(\sum_{i=1}^n a_i)^2}$
- ☐ $\text{Var}[V] = \sigma^2$
- ☐ $\text{Var}[V] = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n a_i^2}$
- ☐ $\text{Var}[V] = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n a_i}$
- ☐ $\text{Var}[V] = \sigma^2 \cdot \frac{(\sum_{i=1}^n a_i)^2}{\sum_{i=1}^n a_i^2}$

Maks poeng: 5

4 **Innledning:** La X være en kontinuerlig stokastisk variabel med kumulativ fordelingsfunksjon

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x^2} & \text{for } x \geq 0, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

La Y være gitt ved

$$Y = X^2.$$

Oppgave: Finn sannsynlighetstettheten $f_Y(y)$ til Y . Velg under korrekt formel for $f_Y(y)$ for $y \geq 0$.

Velg ett alternativ:

- ☐ $f_Y(y) = 4y\sqrt{y}e^{-y}, y \geq 0$
- ☐ $f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y^2}, y \geq 0$
- ☐ $f_Y(y) = e^{-y}, y \geq 0$
- ☐ $f_Y(y) = 2ye^{-y^2}, y \geq 0$
- ☐ $f_Y(y) = 1 - e^{-y}, y \geq 0$
- ☐ $f_Y(y) = 2\sqrt{y}e^{-y}, y \geq 0$

Maks poeng: 5

5(a) Innledning: Anta at du kaster to vanlige terninger. La X være antall seksere du får, og la Y være antall terninger hvor antall øyne er tre eller mindre.

5(b) Innledning: I dette punktet skal du vise hvordan du finner svarene med utgangspunkt i sannsynlighetene $P(X = x, Y = y)$ som er angitt i tabellen i punkt 5(a).

Oppgave: Finn sannsynligheten $P(X + Y = 2)$.

Bestem marginal punktsannsynlighet for X og marginal punktsannsynlighet for Y .

Er X og Y uavhengige? Begrunn svaret.

Det anbefales at du løser denne oppgaven med papir og blyant.

Format ▾
B
I
U
 x_e
 x^2
 I_x











Σ


Words: 0

Maks poeng: 10

Maks poeng: 10

- 6(c) Innledning:** Konfidensintervallet du utledet i forrige punkt er eksakt og gjelder derfor for alle verdier av n . Vi skal nå se på hvordan sentralgrenseteoremet kan benyttes til å konstruere et alternativt konfidensintervall for σ^2 som bare er gyldig når antall målinger n er tilstrekkelig stor.

Oppgave: Skriv ned antagelsene og resultatet i sentralgrenseteoremet.

Forklar hvordan sentralgrenseteoremet kan benyttes til å begrunne at

$$\frac{\hat{\sigma}^2 - \sigma^2}{\sigma^2 \sqrt{\frac{3}{n}}}$$

er tilnærmet standard normalfordelt når n er tilstrekkelig stor.

Det anbefales at du løser denne oppgaven med papir og blyant.

Format ▾ | **B** *I* U x_2 x^2 I_x | | | | |

Σ |

Words: 0

Maks poeng: 10

6(d) Innledning: La som vanlig $z_{\frac{\alpha}{2}}$ være kvantilen slik at $P(Z > z_{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{\alpha}{2}$ når Z er standard normalfordelt.

Oppgave: Benytt resultatet i forrige punkt til å vise at

$$\left[\frac{\hat{\sigma}^2}{1+z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{3}{n}}}, \frac{\hat{\sigma}^2}{1-z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{3}{n}}} \right]$$

er et tilnærmet $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ konfidensintervall for σ^2 når n er stor.

Det anbefales at du løser denne oppgaven med papir og blyant.

Format ▾ | **B** *I* U x_2 x^2 | I_x | | | | Ω | |

Σ |

Words: 0

Maks poeng: 10

6(e) Innledning: Man har tidligere benyttet en annen type instrument for å måle hastigheten på biler. Dette gamle måleinstrumentet har man mye erfaring med og man vet at målenøyaktigheten for dette instrumentet er angitt ved en verdi σ_0^2 .

Vi ønsker nå å benytte de målte hastighetene med de nye instrumentet til å avgjøre om det er grunnlag for å påstå at målenøyaktigheten er bedre med det nye instrumentet enn med det gamle. Dette formuleres som et hypotesetestingsproblem med hypotesene

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad \text{mot} \quad H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2.$$

Vi velger å forkaste H_0 dersom $\hat{\sigma}^2 \leq k\sigma_0^2$, der k er en konstant som må velges slik at man får ønsket signifikansnivå.

Oppgave: Bestem en verdi for k slik at sannsynligheten for type I-feil blir (eksakt) lik α . Angi svaret som en formel for k som funksjon av en eller flere av α , n og σ_0^2 , samt kvantiler i kjikvadratfordelingen. *Hint: Benytt resultatet i (c).*

Benytt at $\hat{\sigma}^2$ er tilnærmet normalfordelt til å finne en (tilnærmet) sannsynlighet for type II-feil når $\sigma^2 = \gamma\sigma_0^2$, for en spesifisert verdi $\gamma < 1$. Angi svaret som en formel for sannsynligheten som funksjon av en eller flere av α , n , σ_0^2 og γ , samt kvantiler i kjikvadratfordelingen og den kumulative fordelingsfunksjonen for en standard normalfordeling.

Det anbefales at du løser denne oppgaven med papir og blyant.

Format
|
B
I
U
x₂
x²
I_x
|
📄
📋
|
↶
↷
↺
|
≡
≡
|
Ω
📊
|
✎

Σ
|
✖

Words: 0

Maks poeng: 10

- 7 Innledning:** La X være binomisk fordelt med n forsøk og sannsynlighet for suksess lik p . En forventningsrett estimator for p er da

$$\hat{p} = \frac{X}{n}.$$

Anta at vi nå er interessert i $\theta = \text{Var}[X] = np(1 - p)$. Som estimator for θ skal vi vurdere

$$\hat{\theta} = n\hat{p}(1 - \hat{p}).$$

Oppgave: Er $\hat{\theta}$ forventningsrett? Begrunn svaret.

Dersom $\hat{\theta}$ ikke er forventningsrett, foreslå en modifisert estimator for θ som er forventningsrett.

Det anbefales at du løser denne oppgaven med papir og blyant.

Format
|
B
I
U
 x_2
 x^2
 I_x
|

|

|

|
 Ω

|

|
 Σ
|

Words: 0

Maks poeng: 10