

i Forside

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i TMA4240/TMA4245 Statistikk

Eksamensdato: 16. august, 2023

Eksamenstid (fra-til): 9:00-13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: Hjelpemiddelkode C. Tabeller og formler i statistikk (Fagbokforlaget). Et gult ark (A5 med stempel) med egne håndskrevne formler og notater. Bestemt, enkel kalkulator.

Faglig kontakt under eksamen: Gunnar Taraldsen.

Faglig kontakt møter i eksamenslokalet: NEI

Tlf.: 46432506

ANNEN INFORMASJON:

Skaff deg overblikk over oppgavesettet før du begynner på besvarelsen din.

I oppgave 1 til 3 skal du kun oppgi korrekt svar uten begrunnelse direkte i Inspira. Følg instruksene i oppgaveteksten angående antall desimaler etter komma i svaret. Hvis du oppgir færre desimaler enn det er spurt om vil svaret kunne bli vurdert som feil. I alle mellomregninger må du bruke minst to desimaler mer enn hva du skal ha i svaret.

I oppgave 4 skal alle svar begrunnes og besvarelsen skal inneholde mellomregning slik at det er helt klart hvordan man har tenkt. Besvarelsen på disse oppgavene skal skrives for hånd på utleverte ark, se informasjon under InspiraScan lenger ned på denne siden.

Les oppgavene nøye, gjør dine egne antagelser og presiser i besvarelsen hvilke forutsetninger du har lagt til grunn i tolkning/avgrensing av oppgaven. Faglig kontaktperson skal kun kontaktes dersom det er direkte feil eller mangler i oppgavesettet. Henvend deg til en eksamensvakt hvis du ønsker å kontakte faglærer. Noter gjerne spørsmålet ditt på forhånd.

InspiraScan: I oppgave 4 skal du levere hele svaret på ark. Nederst i oppgaven finner du en sjusifret kode. Fyll inn denne koden øverst til venstre på arkene du ønsker å levere. Det anbefales å gjøre dette underveis i eksamen. Dersom du behøver tilgang til kodene etter at eksamenstiden har utløpt, må du klikke «Vis besvarelse».

Vekting av oppgavene: Vekt ved sensur for hver deloppgave er angitt i oppgavesettet.

Varslinger: Hvis det oppstår behov for å gi beskjeder til kandidatene underveis i eksamen (f.eks. ved feil i oppgavesettet), vil dette bli gjort via varslinger i Inspira. Et varsel vil dukke opp som en dialogboks på skjermen. Du kan finne igjen varselet ved å klikke på bjella øverst til høyre.

Trekk fra/avbrutt eksamen: Blir du syk under eksamen, eller av andre grunner ønsker å levere blankt/avbryte eksamen, gå til "hamburgermenyen" i øvre høyre hjørne og velg «Lever blankt». Dette kan ikke angres selv om prøven fremdeles er åpen.

Tilgang til besvarelse: Etter eksamen finner du besvarelsen din i arkivet i Inspira. Merk at det kan ta én virkedag før eventuelle håndtegninger vil være tilgjengelige i arkivet.

1 Oppgave 1

Anta at den stokastiske variabelen X har sannsynlighetstetthet

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Regn ut følgende manglende størrelser og oppgi svaret avrundet til to desimalers nøyaktighet.

a) Sannsynligheten $P(0.25 < X < 0.75) =$

b) Forventningsverdien $E(X) =$

c) Variansen $\text{Var}(X) =$

d) Standardavviket $\text{Std}(X) =$

e) Medianen $\text{Median}(X) =$

Maks poeng: 25

2 Oppgave 2

La Z være en standard normalfordelt variabel. Finn følgende manglende størrelser og oppgi svaret avrundet til 2 desimalers nøyaktighet. Det anbefales å bruke tabell.

a) $P(Z < 0.75) =$

b) $P(Z^2 > 1.69) =$

c) $P(1.21 < Z^2 < 2.25) =$

d) $P(Z^2 - 3Z + 2 < 0) =$

e) Integralet $\int_{0.5}^{1.5} e^{-\frac{x^2}{2}} dx =$ kan beregnes ved å bruke tabell.

Maks poeng: 25

3 Oppgave 3

Monica bruker Fjøsbok-appen mye. Tiden T mellom hvert Fjøsbok-pling på Monicas mobil er en stokastisk variabel med sannsynlighetstetthet

$$f(t) = \begin{cases} \beta^{-1} e^{-t/\beta} & t > 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

hvor $\beta = 707$ sekunder. Du kan anta uavhengighet for tidene mellom hvert Fjøsbok-pling. Finn følgende manglende størrelser og oppgi svaret avrundet til to desimalers nøyaktighet:

a) Den forventede tiden mellom to Fjøsbok-pling er minutter og sekunder.

b) Sannsynligheten for at tiden mellom to Fjøsbok-pling er kortere enn 707 sekunder er

$$P(T < 707 \text{ sekunder}) = \text{$$

c) Gunnar begynner å bli lei av Fjøsbok-plingene og observerer en dag tidsintervallene mellom 11 påfølgende Fjøsbok-pling på Monica sin mobiltelefon. Sannsynligheten for at 8 eller flere av de 10 tidsintervallene ble kortere enn 707 sekunder er

d) I en av observasjonene var det ennå ikke kommet et nytt Fjøsbok-pling etter at Gunnar hadde observert mobilen i 15 minutter. Han begynte å gå lei av å observere da. Sannsynligheten for at det gikk minst 5 minutter til før neste Fjøsbok-pling er

e) La $V = T_1 + \dots + T_{10}$ være tiden mellom 11 påfølgende Fjøsbok-pling. Da er standardavviket $\text{Std}(V)$ lik minutter og sekunder.

f) La ett tidsintervall v være slik at $P(V > v) = 0.95$. Da er v lik timer minutter og sekunder. Hint: Kan beregnes ved å bruke en tabell med kritiske verdier for χ^2 -fordelingen.

Maks poeng: 25

4 Oppgave 4

Våren 2022 ble lengden til NTNU pendelen målt 20 ganger med resultat $x_1, \dots, x_{20}$. Empirisk middel ble $\bar{x} = 25.2604 \text{ m}$ og utvalgets standardavvik ble $s_x = 4.4978 \text{ cm}$. Våren 2023 ble lengden til NTNU pendelen målt 44 ganger med resultat $y_1, \dots, y_{44}$. Empirisk middel ble $\bar{y} = 25.2036 \text{ m}$ og utvalgets standardavvik ble $s_y = 11.6327 \text{ cm}$.

Les oppgavene nøye, gjør dine egne antagelser og presiser i besvarelsen hvilke forutsetninger du har lagt til grunn i tolkning/avgrensing av oppgaven.

- a) Gi en begrunnelse for at begge de empiriske middel gir et estimat for pendelens lengde. Er estimatorene forventningsrette? Hvilken estimator er best?
- b) Anta at målingene fra 2022 er et tilfeldig utvalg fra en normalfordeling. Finn et 95% konfidensintervall for pendelens lengde basert på målingene fra 2022. Hvilke antagelser må du gjøre?
- c) På Wikipedia er det oppgitt at pendelens lengde er $\mu_0 = 25 \text{ m}$. Utfør en hypotesetest med signifikansnivå $\alpha = 5\%$ for nullhypotesen $H_0 : \mu = \mu_0$ mot den alternative hypotesen $H_1 : \mu \neq \mu_0$. Bruk kun målingene fra våren 2022. Vis at p-verdien for testen er mindre enn 1%. Hva konkluderer du fra dette? Hvilke antagelser må du gjøre?
- d) Målingene fra 2022 og 2023 gir to ulike estimat for pendelens lengde. Er de signifikant forskjellige? Avgjør dette ved å utføre en hypotesetest med signifikansnivå $\alpha = 1\%$. Hvilke antagelser og approksimasjoner er nødvendige?
- e) Målingene fra 2022 og 2023 kan kombineres til å gi et estimat for pendelens lengde. Bruk rimelighetsfunksjonen til å finne en slik estimator. Du kan her anta at standardavvikene σ_x og σ_y er kjent. Er denne estimatoren bedre enn estimatorene brukt i punkt a)? Finn deretter en estimator for tilfellet at standardavvikene er ukjent, og regn ut et tilhørende estimat.

Husk: Alle svar skal begrunnes!

Besvarelsen på disse oppgavene skal skrives for hånd på utleverte ark.