

i Institutt for matematiske fag**Eksamensoppgave i TMA4240/TMA4245 Statistikk**

Eksamensdato: 15. august 2024

Eksamenstid (fra-til): 15:00 - 19:00

Hjelpemiddelkode: C

Tillatte hjelpemidler: Tabeller og formler i statistikk, Akademika (markeringer med tekstmarkør i formelheftet er tillatt); Bestemt, enkel kalkulator; Gult stemplet A5-ark med håndskrevne notater.

Faglig kontakt under eksamen:

Sara Martino, tlf: 99 40 33 30

Faglig kontakt møter i eksamenslokalet: NEI

ANNEN INFORMASJON:

Les oppgavene nøye, gjør dine egne antagelser og presiser i besvarelsen hvilke forutsetninger du har lagt til grunn i tolkning/avgrensing av oppgaven. Faglig kontaktperson kontaktes kun dersom det er direkte feil eller mangler i oppgavesettet. Henvend deg til en eksamensvakt hvis du mistenker feil og mangler. Noter spørsmålet ditt på forhånd.

Håndtegninger: I oppgavene **4, 5, 6** er det lagt opp til å besvare på ark. Andre oppgaver skal besvares direkte i Inspira. Nederst i oppgaven finner du en sjusifret kode. Fyll inn denne koden øverst til venstre på arkene du ønsker å levere. Det anbefales å gjøre dette underveis i eksamen. Dersom du behøver tilgang til kodene etter at eksamenstiden har utløpt, må du klikke «Vis besvarelse».

Vekting av oppgavene: *I oppgave 1-3 teller hver deloppgave (f.eks. 1a) 3 poeng. I oppgave 4-6 teller hver deloppgave (f.eks. 4 eller 6a) 10 poeng.*

Varslinger: Hvis det oppstår behov for å gi beskjeder til kandidatene underveis i eksamen (f.eks. ved feil i oppgavesettet), vil dette bli gjort via varslinger i Inspira. Et varsel vil dukke opp som en dialogboks på skjermen. Du kan finne igjen varselet ved å klikke på bjella øverst til høyre.

Trekk fra/avbrutt eksamen: Blir du syk under eksamen, eller av andre grunner ønsker å levere blankt/avbryte eksamen, gå til "hamburgermenyen" i øvre høyre hjørne og velg «Lever blankt». Dette kan ikke angres selv om prøven fremdeles er åpen.

Tilgang til besvarelse: Etter eksamen finner du besvarelsen din i arkivet i Inspira. Merk at det kan ta én virkedag før eventuelle håndtegninger vil være tilgjengelige i arkivet.

- 1 La X og Y være to normalfordelte stokastiske variabler. Anta at X har forventning 2 og varians 2 mens Y har forventning 0 og varians 1. Anta videre at kovariansen mellom X og Y er 1.

Fyll inn tallsvar for følgende fire oppgaver. Angi svarene med to siffer etter komma, f.eks 9.87 eller 0.20.

a) $E(X + Y) =$

b) $\text{Var}(2X + Y) =$

c) $P(X < 3) =$

d) $P(Y > 0) =$

Maks poeng: 12

- 2 Vi har samlet inn et datasett bestående av 7 datapunkter: 2, 4, 6, 8, 4, 9, 9.

Regn ut gjennomsnittet, medianen og det empiriske standardavviket. Angi svarene med to siffer etter komma, f.eks 9.87 eller 0.20.

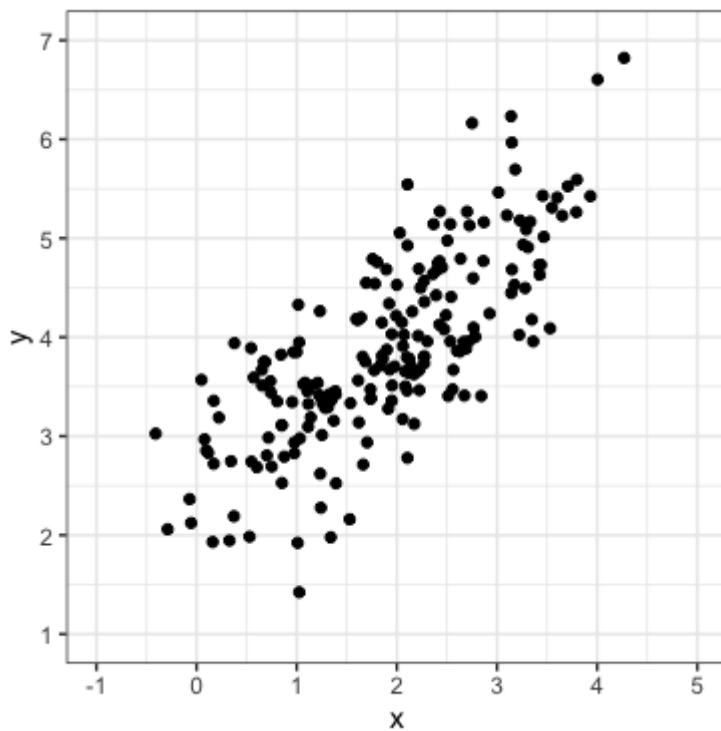
a) Gjennomsnitt =

b) Median =

c) Standardavvik =

Maks poeng: 9

3



Figuren viser 200 parvise observasjoner av normalfordelte stokastiske variabler X og Y . Det oppgis at forventningsverdiene $E(X)$ og $E(Y)$ er heltall. Standardavvikene $SD(X)$ og $SD(Y)$ er også heltall.

a) Med utgangspunkt i figuren over, hvilken påstand angående forventningsverdien til X ser ut til å være sann?

Velg ett alternativ

- ☐ $E(X) = 3$
- ☐ $E(X) = 0$
- ☐ $E(X) = 1$
- ☐ $E(X) = 2$
- ☐ $E(X) = 4$
- ☐ $E(X) = 5$

b) Med utgangspunkt i figuren over, hvilken påstand angående standardavviket til Y ser ut til å være sann?

Velg ett alternativ

- ☐ $SD(Y) = 2$
- ☐ $SD(Y) = 4$
- ☐ $SD(Y) = 0$
- ☐ $SD(Y) = 3$
- ☐ $SD(Y) = 1$
- ☐ $SD(Y) = 5$

c) Med utgangspunkt i figuren over, hvilken påstand angående korrelasjonen mellom X og Y ser ut til å være sann?

Velg ett alternativ

- ☐ $Cor(X,Y) = 0$
- ☐ $Cor(X,Y) = 0.1$
- ☐ $Cor(X,Y) = -1$
- ☐ $Cor(X,Y) = 1$
- ☐ $Cor(X,Y) = 0.8$
- ☐ $Cor(X,Y) = -0.7$

Maks poeng: 9

- 4 Ved AA-fakultetet jobber det 250 personer. 110 av de ansatte ved AA-fakultet er organisert i hovedorganisasjonen Unio, mens 80 av de ansatte er organisert i Akademikerne. Resten av de ansatte er uorganiserte (ikke medlemmer av Unio, Akademikerne eller andre organisasjoner). Det er ikke mulig å være organisert i mer enn én organisasjon.

Unio og Akademikerne har bestemt seg for å gå til streik. Ved AA-fakultet skal Unio ta ut 10% av sine ansatte i streik, mens Akademikerne skal ta ut 50% av sine ansatte i streik. Uorganiserte streiker ikke.

- (i) Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig valgt AA-ansatt er medlem i Unio?
 (ii) Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig valgt AA-ansatt skal ut i streik?

Ved AA-, BB- og CC-fakultetene er henholdsvis 110, 50 og 60 ansatte organisert i Unio. Unio har tatt ut 10% av sine ansatte ved AA-fakultet i streik, 50% av sine ansatte ved BB-fakultet og 30% av sine ansatte ved CC-fakultet.

- (iii) Gitt at en tilfeldig valgt streiker *ikke* er ansatt ved AA-fakultet, hva er sannsynligheten for at personen er ansatt ved CC-fakultet?

For alle som er tatt ut i streik av Unio må man med sannsynligheten 0.35 stå streikevakt mandag morgen, uansett fakultet.

- (iv) Mandag morgen møter vi tilfeldigvis en streikevakt fra Unio. Hva er sannsynligheten for at personen er ansatt ved CC-fakultet?

Det anbefales at du løser denne oppgaven med papir og blyant.

Format
|
B
I
U
 $\times_2$
 $\times^2$
 $\mathcal{I}_x$
|
📄
📋
|
↶
↷
↺
|
1=
:≡
≡≡
≡≡
|
Ω
📅
|
✎
|
Σ
|
✖

Maks poeng: 10

Words: 0

Maks poeng: 10

6(a) Anta at en stokastisk variabel X er eksponensialfordelt med sannsynlighetstetthet

$$f(x) = \frac{1}{\mu} e^{-x/\mu} \quad \text{for } x \geq 0, \text{ og } f(x) = 0 \text{ ellers.}$$

(i) Vis at kumulativ fordeling $F(x)$ er

$$F(x) = 1 - \exp(-x/\mu), \quad \text{for } x \geq 0$$

Anta i de neste to punktene at $\mu = 1000$.

(ii) Hva er sannsynlighet for at X er mindre enn 2000?

(iii) Hva er medianen til X , dvs hvilken verdi m oppfyller $P(X \leq m) = 0.5$?

Det anbefales at du løser denne oppgaven med papir og blyant.

Format ▾ | **B** *I* U x_2 x^2 | I_x | | | |

| | | Σ |

Words: 0

Maks poeng: 10

6(b) Anta som i forrige deloppgave at den stokastiske variabelen X er eksponensialfordelt med parameter μ .

(i) Vis at $2X/\mu$ er χ^2 -fordelt (kvikvadratfordelt) med 2 frihetsgrader.

(ii) Videre, la $X_1, \dots, X_n$ være uavhengige og eksponensialfordelte med parameter μ . Hva er fordelingen til $2 \sum_{i=1}^n X_i/\mu$?

Det anbefales at du løser denne oppgaven med papir og blyant.

Format
|
B
I
U
x₂
x²
I_x
|
📄
📋
|
↶
↷
↺
|
☰
☷
☰☷
☰☷☰☷
|
Ω
📊
|
✎
|
Σ
|
✖

Words: 0

Maks poeng: 10

6(c) Anta at $X_1, \dots, X_n$ er uavhengige eksponensialfordelte stokastiske variabler med parameter μ .

(i) Utled et konfidensintervall for μ , og regn ut et 95% konfidensintervall ut fra følgende data:

3912, 30, 1833, 2120, 598

Skriv ditt svar her

Format

B

I

U

x_2

x^2

I_x

Ω

Σ

Words: 0

Maks poeng: 10

6(d) Anta at $X_1, \dots, X_m$ er m uavhengige eksponensialfordelte stokastiske variabler med parameter μ_A og at $Y_1, \dots, Y_n$ er n uavhengige eksponensialfordelte stokastiske variabler med parameter μ_B . Anta videre at $\mu_A = 2\mu_B$.

(i) Med utgangspunkt i både $X_1, \dots, X_m$ og $Y_1, \dots, Y_n$, finn sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren for μ_A .

Skriv ditt svar her

Maks poeng: 10

- 6(e) Anta at X er eksponensialfordelt med parameter μ_A og at Y er eksponensialfordelt med parameter μ_B . Anta også at X og Y er uavhengige.

For å teste nullhypotesen:

$$H_0 : \mu_A = 2\mu_B \text{ mot } H_1 : \mu_A > 2\mu_B$$

gjennomføres følgende forsøk: Vi trekker en verdi for X og en verdi for Y . Dette gjentas n ganger slik at vi får n uavhengige par (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$.

Testen skal baseres på antall ganger (Z) verdien som ble trukket for variabel X er mindre enn halvparten av verdien som ble trukket for variabel Y . Du kan bruke at

$$P(X < \frac{Y}{2}) = \frac{\mu_A}{\mu_A + 2\mu_B}$$

- (i) Hvilken fordeling har den stokastiske variabelen Z ?
 (ii) Sett opp en hypotesetest basert på Z som beskrevet ovenfor. Hva blir konklusjonen hvis du bruker signifikansnivå 0.05 og observerer $z = 7$ når $n = 10$?

Skriv ditt svar her

Format ▾ | **B** *I* U $\times_2$ $\times^2$ | $\mathcal{I}_x$ | | |

| | | Σ |

Words: 0

Maks poeng: 10