Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Nynorsk

Fagleg kontakt under eksamen:

Arvid Næss	73 59 70 53/ 99 53 83 50
Jarle Tufto	99 70 55 19
Ola Diserud	93 21 88 23

EKSAMEN I EMNE TMA4245 STATISTIKK

3. juni 2010
Tid: 09:00–13:00

Hjelpemiddel: *Tabeller og formler i statistikk*, Tapir Forlag
K. Rottmann: *Matematisk formelsamling*
Kalkulator HP30S
Gult, stemplet A5-ark med egne håndskrevne notat.

Oppgave 1 Ein sjeldsynt genvariant a disponerar for ein bestemd sjukdom. I ein populasjon er den relative frekvensen av individ som bærer to kopiar av genvarianten (individ av genotype aa) 0.0001, frekvensen av individ som bærer ein kopi (genotypen Aa) er 0.0198 og frekvensen av individ som ikke har den sjeldsynte genvarianten (genotypen AA) er 0.9801. Gå ut i frå at sannsynsynet for at sjukdomen kjem til uttrykk blant personar med genotype aa, aA og AA er, i same følgd, 0.6, 0.02 og 0.01.

a) Kva er sannsynet for at sjukdomen kjem til uttrykk i eit tilfeldig valt individ frå populasjonen?

b) Kva vert dei respektive sannsyna for at eit individ er av genotypane aa, Aa og AA gjeve at sjukdomen har kome til uttrykk i individet?

Oppgave 2 Ein fabrikk produserar ein spesiell type maskinkomponentar. Tida frå ein komponent blir teke i bruk til han bryt saman for fyrste gong, kaller vi levetida for komponenten. Røynsle har vist at levetida T, målt i veker, kan modellerast som ein kontinuerlig stokastisk variabel med sannsynstettleik (sannsynsfordeling):

$$\begin{aligned} f_T(t) &= 2\lambda t e^{-\lambda t^2}\,, \quad t \geq 0\,, \\ &= 0\,, \qquad \text{ellers}\,, \end{aligned} \tag{1}$$

der $\lambda > 0$ er ein ukjend parameter.

a) Bestem kumulativ fordelingsfunksjon $F_T(t)$ til T, og rekn ut $P(20 < T \leq 30)$ når $\lambda = 1.5 \cdot 10^{-3}$.

b) Parameteren λ skal estimerast på basis av levetidene $T_1, \ldots, T_n$ for $n > 2$ tilfeldig valde komponentar. Gå ut i frå at $T_1, \ldots, T_n$ er uavhengige og identisk fordelte med sannsynstettleik $f_T(t)$. Vis at sannsynsmaksimeringsestimatoren (SME) for λ vert

$$\Lambda^* = \frac{n}{\sum_{i=1}^n T_i^2}\,. \tag{2}$$

c) La X vere χ^2-fordelt med $2n$ frihetsgradar ($n > 2$). Vis at

$$\mathrm{E}(X^{-1}) = \frac{1}{2(n-1)} \quad \text{og} \quad \mathrm{E}(X^{-2}) = \frac{1}{4(n-1)(n-2)}\,. \tag{3}$$

Vis at $Y = 2\lambda T^2$ er χ^2-fordelt med 2 frihetsgradar (husk at $T \geq 0$). Bruk så dette resultatet saman med ligning (3) til å undersøke om Λ^* er forventningsrett. Om nødvendig, korrigér for å få ein estimator som er forventningsrett. Bestem også denne estimatorens varians. (Hint: Dei resultata som kan hjelpe deg her, står i 'Tabeller og formler i statistikk'.)

d) Rekn ut eit $100(1-\alpha)\%$ konfidensintervall for λ. Bestem intervallet numerisk når $\alpha = 0.05$, $n = 5$ og dei observerte verdiane er

23.63 35.97 18.65 18.18 11.59

e) Ein dag oppdagast feil ved produksjonsprosessen. Komponentane testes ved at 5 komponentar veljast tilfeldig frå dagsproduksjonen, og levetidene fastsetjast for desse ved akselerert levetidstesting. Observasjonane brukast til å teste

$$H_0 \;: \lambda \leq \lambda_0 = 1.5 \cdot 10^{-3}$$

mot

$$H_1 \;: \lambda > \lambda_0 = 1.5 \cdot 10^{-3}$$

Påvis at $2\lambda_0 \sum_{i=1}^{n} T_i^2$ kan brukast som testobservator, og bestem det kritiske området for testen for signifikansnivå α. Konkludér for $\alpha = 0.05$ når observasjonane er

$$12.06 \quad 18.02 \quad 19.86 \quad 16.60 \quad 9.36$$

Komponentane blir pakka i kasser med 5 komponentar i kvar kasse. Fabrikken garanterar at alle komponentane i ei kasse har levetid på minst a veker. Fabrikken får reklamasjon på ein kasse hvis ein eller fleire av dei 5 komponentane i kassa har levetid kortare enn a uker.

f) Hvis $\lambda = 1.5 \cdot 10^{-3}$, kor stor kan a veljast for at sannsynet for reklamasjon skal vere høgst 0.05? Du kan gå ut i frå uavhengige levetider.

g) La a og λ vere som i punkt f), og gå ut i frå at i eit visst tidsrom vert 1000 kasser selde. La U vere talet på kasser som det vert reklamert på. Kva for føresetnader må ein gjere for at U skal vere binomisk fordelt? Gå ut i frå at disse føresetnadene er oppfyllde og bestem $P(U \leq 60)$ ved å bruke tilnærming til normalfordeling.