

1 1**Oppgave 1**

Anta at X er en stokastisk variabel med kumulativ fordelingfunksjon

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^3 & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

Regn ut følgende manglende størrelser og oppgi svaret avrundet til tre desimalers nøyaktighet.

a) Sannsynligheten $P(-2 < X < 0.5) =$.

b) Forventningsverdien $E(X) =$.

c) Variansen $\text{Var}(X) =$.

d) Standardavviket $\text{Std}(X) =$.

e) Øvre 5%-kvantil til $X =$.

Merk: Denne oppgaven skal besvares kun ved å fylle inn feltene over uten å levere inn håndskrevet tekst på papir.

Maks poeng: 10

2 2**Oppgave 2**

La Y være en normalfordelt variabel med forventning 10 og standardavvik 5. Finn følgende manglende størrelser og oppgi svaret avrundet til 3 desimalers nøyaktighet. Det anbefales å bruke tabell.

a) $P(Y < 0) =$

b) $P(Y^2 = 100) =$

c) $P(Y^2 - 20Y < 0) =$

d) $E(Y^2) =$

e) La f være tetthetsfunksjonen til Y . $f(15) =$

Merk: Denne oppgaven skal besvares kun ved å fylle inn feltene over uten å levere inn håndskrevet tekst på papir.

Maks poeng: 10

3 3**Oppgave 3**

Anta at X og Y har simultan punktsannsynlighet $f(x, y)$ gitt ved følgende tabell:

$x \backslash y$	0	1	2
0	0.1	0.2	0.1
1	0.4	0.2	0

Finn følgende manglende størrelser og oppgi svaret avrundet til 3 desimalers nøyaktighet.

a) $P(Y = 2) =$

b) $P(Y = 0 | X = 1) =$

c) $E(Y) =$

d) $E(XY) =$

e) $\text{corr}(5X - 2, 10Y + 3) =$

Merk: Denne oppgaven skal besvares kun ved å fylle inn feltene over uten å levere inn håndskrevet tekst på papir.

Maks poeng: 10

4 4

Oppgave 4

En produsent av Lithium-Ion batterier leverer batterier med garanti om at batterikapasiteten til enkeltbatterier skal være normalfordelt med forventning $\mu_0 = 2000\text{mAh}$ og med standardavvik lik $\sigma_0 = 10\text{mAh}$. En mobiltelefonprodusent tar inn en prøveparti på tilsammen $N = 50$ batterier og måler kapasiteten $X_1, X_2, \dots, X_n$ på batteriene i et utvalg av størrelse $n = 25$ fra de totalt $N = 50$ batteriene i prøvepartiet. Anta at batterikapasiteten til alle batterier i vareprøven er uavhengige av hverandre. Det oppgis at den observerte gjennomsnittlig kapasiteten til batteriene i utvalget $\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = 1995\text{mAh}$ og det observerte utvalgsstandardavviket $s_n = 15.48\text{mAh}$.

a) Utled et 95%-konfidensintervall for μ på grunnlag av målingene i utvalget under forutsetning om at standardavviket til batterikapasiteten er slik som produsenten garanterer og beregn intervallet for målingen gitt over. Anta at vi i stedet hadde utført en to-sidig hypotesetest av $H_0 : \mu = \mu_0$ versus $H_1 : \mu \neq \mu_0$ der $\mu_0 = 2000\text{mAh}$ med signifikansnivå $\alpha = 0.05$. Hva hadde i tilfelle konklusjonen blitt?

b) På grunnlaget av målingene mistenker mobiltelefonprodusenten at standardavviket til kapasiteten til batterier fra produsenten er større enn oppgitt i garantien. Formuler dette som en hypotesetest. Bestem null og alternativ hypotese og foreslå en egnet testobservator gitt målingene nevnt over. Bestem kritisk verdi for testen når vi velger et signifikansnivå $\alpha = 0.05$. Hva blir testens konklusjon?

c) La $F_{\chi^2_\nu}(x) = P(\chi^2_\nu \leq x)$ betegne kumulativ fordelingsfunksjon til en kji-kvadrat fordelt variabel med ν frihetsgrader. Utled et uttrykk for styrken til testen i punkt b) uttrykt ved funksjonen $F_{\chi^2_\nu}(x)$ gitt at den sanne verdien til $\sigma = 15\text{mAh}$.

d) La $\bar{X}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$ betegne gjennomsnittlig batterikapasitet til alle de $N = 50$ batteriene i vareprøven og la som før $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ betegne gjennomsnittet i utvalget. Vis at $\bar{X}_n - \bar{X}_N$ kan skrives som en lineærkombinasjon $X_1, X_2, \dots, X_N$. Hvilken fordeling har $\bar{X}_n - \bar{X}_N$? Bestem $E(\bar{X}_n - \bar{X}_N)$. Vis at

$$\text{Var}(\bar{X}_n - \bar{X}_N) = \frac{\sigma^2}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right).$$

Bruk dette til å utlede et $(1 - \alpha)$ prediksjonsintervall for gjennomsnittlig batterikapasitet til de $N = 50$ batteriene i vareprøven på grunnlag av målt kapasitet til de $n = 25$ batteriene i utvalget.

Husk: Alle svar skal begrunnes!

Det anbefales at du skriver besvarelsen på papir.

Maks poeng: 40

5 5**Oppgave 5**

En produsent av elbilladere produserer $m = 500$ ladere hver produksjonsdag. Som en del av kvalitetskontrollen inspiseres et antall ladere hver produksjonsdag inntil en har funnet feil på tilsammen $r = 2$ ladere. Vi skal nå se på $n = 10$ ulike produksjonsdager og la Y_i være antall ladere som blir inspisert på dag i , $i = 1, 2, \dots, n$, av disse. Anta at ulike ladere har feil uavhengig av hverandre og med samme sannsynlighet q . Det oppgis at $\sum_{i=1}^{10} y_i = 1601$. Se i det følgende bort fra at hver Y_i høyst kan ta verdien m .

- a) Forklar hvorfor hver Y_i er negativt binomisk fordelt med parametrene r og q . Beregn sannsynligheten $P(Y_i = 5)$ gitt at $q = 1/10$.
- b) Vis at sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren av parameteren q er gitt ved $\hat{q} = 2n / \sum_{i=1}^n Y_i$ og beregn et estimat av q gitt observasjonene over.
- c) Begrunn hvorfor fordelingen til Y_i kan tilnærmes med normalfordeling når r er stor. Bruk dette til å beregne et estimat av sannsynligheten for at $Y_i > m$ basert på slik normaltilnærming. Finn om mulig et alternativt eksakt uttrykk for samme sannsynlighet og det tilhørende estimatet.

Husk: Alle svar skal begrunnes!

Det anbefales at du skriver besvarelsen på papir.

Maks poeng: 30