1 **1**

Oppgåve 1

Gå ut frå at X er ein stokastisk variabel med kumulativ fordelingsfunksjon

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^3 & 0 \le x \le 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

Rekn ut følgjande manglande storleikar og oppgje svaret avrunda til tre desimalar nøyaktigheit.

a) Sannsynet $\mathrm{P}(-2 < X < 0.5)$ = ☐ .

b) Forventingsverdien $\mathrm{E}(X)$ = ☐

c) Variansen $\mathrm{Var}(X)$ = ☐

d) Standardavviket $\mathrm{Std}(X)$ = ☐

e) Øvre 5%-kvantil til X = ☐

Merk: Denne oppgåva skal svarast på berre ved å fylle inn feltene over utan å levera inn håndskreven tekst på papir.

Maks poeng: 10

2

Oppgåve 2

La Y vere ein normalfordelt variabel med forventing 10 og standardavvik 5. Finn følgjande manglande storleikar og oppgje svaret avrunda til 3 desimalar nøyaktigheit. Det er anbefalt å bruke tabell.

a) $P(Y < 0)$ =

b) $P(Y^2 = 100)$ =

c) $P(Y^2 - 20Y < 0)$ =

d) $E(Y^2)$ =

e) La f vere sannsynstettleiken til Y. $f(15)$ =

Merk: Denne oppgåva skal svarast på berre ved å fylle inn feltene over utan å levera inn håndskreven tekst på papir.

Maks poeng: 10

3 **3**

Oppgåve 3

Gå ut ifrå at X og Y har simultant punktsannsyn $f(x, y)$ gitt ved følgjande tabell:

$x\backslash y$	0	1	2
0	0.1	0.2	0.1
1	0.4	0.2	0

Finn følgjande manglande storleikar og oppgje svaret avrunda til 3 desimalar nøyaktigheit.

a) $P(Y = 2) =$

b) $P(Y = 0|X = 1) =$

c) $E(Y) =$

d) $E(XY) =$

e) $\mathrm{corr}(5X - 2, 10Y + 3) =$

Merk: Denne oppgåva skal svarast på berre ved å fylle inn feltene over utan å levera inn håndskreven tekst på papir.

Maks poeng: 10

4

Oppgåve 4

Ein produsent av Lithium-Ion batteri leverer batteri med garanti om at batterikapasiteten til enkeltbatteri skal vere normalfordelt med forventning μ_0 =2000mAh og standardavvik lik $\sigma_0 =$ 10mAh. Ein mobiltelefonprodusent tek inn eit prøveparti på tilsaman $N = 50$ batteri og måler kapasiteten $X_1, X_2, \ldots, X_n$ på batteria i eit tilfeldig utval av storkleik $n = 25$ frå dei totalt $N = 50$ batteria i prøvepartiet. Gå ut i frå at batterikapasiteten til alle batterier i vareprøva er uavhengige av kvarandre. Det blir oppgitt at den observerte gjennomsnittlege kapasiteten til batteria i utvalet $\bar{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 1995$mAh og det observerte utvalsstandardavviket $s_n = 15.48$mAh.

a) Utlei eit 95%-konfidensintervall for μ på grunnlag av målingane i utvalet under føresetnad om at standardavviket til batterikapasitene er slik produsenten garanterar og rekn ut intervallet for målingane gjeve over. Gå ut i frå at vi i staden for hadde utført ein to-sidig hypotesetest av $H_0 : \mu = \mu_0$ versus $H_1 : \mu \neq \mu_0$ der $\mu_0 = 2000$ mAh med signifikansnivå $\alpha = 0.05$. Kva ville då konklusjonen blitt?

b) På grunnlag av målingane mistenkjer mobiltelefonprodusenten at standardavviket til kapasiteten til batterier fra produsenten er større enn oppgitt i garantien. Formuler dette som ein hypotesetest. Bestem null og alternativ hypotese og føreslå ein eigna testobservator gitt målingane nemnt over. Bestem kritisk verdi for testen når vi vel eit signifikansnivå $\alpha = 0.05$. Kva blir konklusjonen frå testen?

c) La $F_{\chi^2_\nu}(x) = P(\chi^2_\nu \leq x)$ vere kumulativ fordelingsfunksjon til ein kji-kvadrat fordelt stokastisk variabel med ν fridomsgrader. Utlei eit uttrykk for styrken til testen i punkt b) uttrykt ved funksjonen $F_{\chi^2_\nu}(x)$ gitt at den sanne verdien til $\sigma = 15$mAh.

d) La $\bar{X}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$ vere gjennomsnittleg batterikapasitet til alle dei $N = 50$ batteria i vareprøva, og la som før $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ vere gjennomsnittet i utvalet. Vis at $\bar{X}_n - \bar{X}_N$ kan skrives som en lineærkombinasjon $X_1, X_2, \ldots, X_N$. Kva fordeling har $\bar{X}_n - \bar{X}_N$? Bestem $E(\bar{X}_n - \bar{X}_N)$. Vis at

$$\mathrm{Var}(\bar{X}_n - \bar{X}_N) = \frac{\sigma^2}{n}\left(1 - \frac{n}{N}\right).$$

Bruk dette til å utleie eit $(1 - \alpha)$ prediksjonsintervall for gjennomsnittleg batterikapasitet til dei $N = 50$ batteria i vareprøva på grunnlag av målt kapasitet til dei $n = 25$ batteria i utvalet.

Hugs: Alle svar skal grunngjevast!

Det anbefales at du skriver besvarelsen på papir.

Maks poeng: 40

5

Oppgåve 5

Ein produsent av elbilladarar produserer $m = 500$ ladarar kvar produksjonsdag. Som ein del av kvalitetskontrollen blir eit tal ladarar inspisert kvar produksjonsdag til ein har funne feil på tilsaman $r = 2$ ladarar. Vi skal no sjå på $n = 10$ ulike produksjonsdagar og la Y_i vere talet på ladarar som blir inspisert på dag i, $i = 1, 2, \ldots, n$, av desse. Gå ut i frå at ulike ladarar har feil uavhengig av hverandre og med same sannsyn q. Det blir oppgitt at $\sum_{i=1}^{10} y_i = 1601$. Sjå i det følgjande bort frå at kvar Y_i høgst kan ta verdien m.

a) Forklar kvifor kvar Y_i er negativt binomisk fordelt med parameterar r og q. Rekn ut sannsynet $P(Y_i = 5)$ gitt at $q = 1/10$.

b) Vis at sannsynsmaksimeringsestimatoren av parameteren q er gitt ved $\hat{q} = 2n/\sum_{i=1}^{n} Y_i$ og finn eit estimat av q gitt observasjonane over.

c) Grunngjev kvifor fordelinga til Y_i kan tilnærmast med ei normalfordeling når r er stor. Bruk dette til å finne eit estimat av sannsynet for at $Y_i > m$ basert på normalfordelingstilnærminga. Finn om mogeleg eit alternativt eksakt uttrykk for det same sannsynet og det tilhøyrande estimatet.

Hugs: Alle svar skal grunngjevast!

Det anbefales at du skriver besvarelsen på papir.

Maks poeng: 30