



Bokmål

Faglig kontakt under eksamen:

John Tyssedal 73 59 35 34/ 41 64 53 76

Jo Eidsvik 73 59 01 53/ 90 12 74 72

EKSAMEN I EMNE TMA4245 STATISTIKK

15. mai 2009

Tid: 09:00–13:00

Hjelpemidler: *Tabeller og formler i statistikk*, Tapir Forlag

K. Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Kalkulator HP30S / CITIZEN SR-270X

Gult, stemplet A5-ark med egne håndskrevne notat.

Sensuren faller: 9. juni 2009

Oppgave 1

Vannverket

Et vannverk har to pumper for å pumpe vann fra en drikkevannskilde til et vannreservoar. For å kunne pumpe vann må minst en av pumpene fungere. For en vilkårlig dag la A_1 være hendelsen at pumpe 1 fungerer, og la A_2 være hendelsen at pumpe 2 fungerer. Fra tidligere vet en at $P(A_1) = 0.8$, $P(A_2) = 0.8$ og $P(A_1|A_2) = 0.9$.

a) Er hendelsene A_1 og A_2 uavhengige? Er hendelsene A_1 og A_2 disjunkte? Grunngi svarene.

Finn sannsynligheten for at vannverket kan pumpe vann en vilkårlig dag, det vil si finn $P(A_1 \cup A_2)$.

Vannverket blir pålagt krav om at de over tid skal kunne pumpe vann i 997 av 1000 dager. De bestemmer seg for å intallere en pumpe til slik at de kan pumpe vann dersom minst en av de tre pumpene fungerer. Den nye pumpen skal fungere uavhengig av de to andre. La A_3 være hendelsen at den nye pumpen fungerer.

- b) Hvor stor må $P(A_3)$ være for at sannsynligheten for å kunne pumpe vann en vilkårlig dag skal være 0.997?

Anta at sannsynligheten for at vannverket kan pumpe vann en dag er uavhengig av om det kunne pumpe de foregående dagene. La X være antall dager til første gang vannverket ikke kan pumpe vann. Hvilken fordeling har X ? Grunngi svaret. Hva blir $E(X)$ etter at den tredje pumpen er installert?

Oppgave 2 Avviksrapporter

Knut har ansvar for internkontrollen i en større bedrift, og er opptatt av hvor mange meldinger om alvorlige avvik som kommer inn.

La N vere antall meldinger som kommer inn i et tidsrom av lengde t . Vi antar at meldingene kommer inn uavhengig av hverandre, og at N er poissonfordelt med parameter λt ;

$$f(n; \lambda t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} \exp(-\lambda t) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Det er kjent at $\lambda = 1.5$ meldinger / uke.

- a) Hva er sannsynligheten for at det i et tidsrom på en uke ikke kommer inn noen meldinger om alvorlige avvik?

Hva er sannsynligheten for at det i et tidsrom på fire uker kommer inn flere enn to slike meldinger?

- b) Knut reiser på ferie. Når han kommer tilbake tre uker senere, er det kommet inn en melding om alvorlig avvik.

Hva er sannsynligheten for at meldinga kom inn i den første uka han var på ferie? Grunngi svaret.

La T være tiden fra Knut reiser på ferie til denne meldinga kom inn. Finn fordelinga til T . Vis utledninga og argumenter for resultatet.

Knut har inntrykk av at avvik ikke blir meldt inn fordi det er tidkrevende, og han innfører et nytt system for innmelding av alvorlige avvik. Det første året (52 uker) det nye systemet var i bruk kom det inn $N = 104$ meldinger.

Knut ønsker å estimere λ basert på disse dataene.

- c) Vis at sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren for λ er

$$\hat{\lambda}_{SME} = \frac{N}{52}$$

Finn forventning og varians for $\hat{\lambda}_{SME}$. Er $\hat{\lambda}_{SME}$ forventningsrett? Hva blir sannsynlighetsmaksimeringsestimatet for λ ?

Opgave 3 Kontrastmiddel

Effekten av ulike typer kontrastmiddel brukt ved røntgenundersøkelser av hender skal studeres. Kontrastmiddelet injiseres i håndflaten før røntgenbildet tas. En ønsker å minske strålingsfaren ved å ta få bilder - helst bare ett av hver hånd.

For å måle effekten har en utviklet et kontrastmål for et bilde av en hånd. Uten kontrastmiddel benevnes målet K_0 og det varierer fra person til person, men kan ansees som identisk for begge hendene på en person. Tidligere erfaring tilsier at K_0 er normalfordelt med forventningsverdi μ_0 og standardavvik σ_0 . Det vil si at K_0 er $n(k_0; \mu_0, \sigma_0)$.

- a) Anta i dette punktet at $\mu_0 = 25$ og $\sigma_0 = 4$.

Finn følgende sannsynligheter:

$$P(K_0 \geq 30)$$

$$P(20 \leq K_0 < 30)$$

Anta nå at μ_0 og σ_0 er ukjente. En studie på 10 forsøkspersoner brukes til å kartlegge kontrastmålet. Et røntgenbilde uten bruk av kontrastmiddel tas av en av hendene til hver av de 10 forsøkspersonene. Det resulterer i 10 uavhengige observasjoner av kontrastmålet K_0 , se tabell 1.

Forsøksnr. i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$k_0(i)$	21	28	19	23	31	32	28	23	28	27

Tabell 1: Målt kontrast uten bruk av kontrastmiddel. Her blir $\bar{k}_0 = 1/10 \sum_{i=1}^{10} k_0(i) = 26$ og $\sum_{i=1}^{10} (k_0(i) - \bar{k}_0)^2 = 166$.

- b) Utled et 90% konfidensintervall for forventet kontrastmål μ_0 , og finn tallsvar.

Ved bruk av kontrastmiddel endres kontrasten i røntgenbildene slik at kontrastmålet blir:

$$K = K_0 + R$$

hvor R er effekten av kontrastmiddelet.

Anta at R er normalfordelt med forventning μ_R og standardavvik σ_R , dvs $n(r; \mu_R, \sigma_R)$. Videre antar vi at K_0 og R har en korrelasjon på ρ_{0R} , og at også K er normalfordelt $n(k; \mu_K, \sigma_K)$.

- c) Utled uttrykk for forventningen μ_K og standardavviket σ_K til kontrastmålet ved bruk av kontrastmiddel.

Vi ønsker nå å sammenlikne kontrastmålene ved bruk av to ulike kontrastmiddel, type A og type B. La effekten av hver av disse være R_A og R_B , og tilsvarende blir kontrastmålene:

$$K_A = K_0 + R_A$$

$$K_B = K_0 + R_B$$

Vi antar at alle variablene er normalfordelte, og at R_A og R_B er uavhengige. For å undersøke kontrastmålene for de to ulike kontrastmidlene gjennomfører vi et forsøksopplegg: For hver type gjør vi 10 forsøk. For de 20 forsøkspersonene injiseres kontrastmiddelet i en hånd, et røntgenbilde tas, og kontrastmålet registreres. Dette gir et sett av uavhengige observasjoner av K_A og K_B , se tabell 2 og 3.

Forsøk nr (i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$k_A(i)$	29	38	26	32	40	43	37	31	38	36

Tabell 2: Målt kontrast ved bruk av kontrastmiddel A. Her blir $\bar{k}_A = 1/10 \sum_{i=1}^{10} k_A(i) = 35$.

Forsøk nr (i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$k_B(i)$	44	37	46	40	33	29	36	42	35	38

Tabell 3: Målt kontrast ved bruk av kontrastmiddel B. Her blir $\bar{k}_B = 1/10 \sum_{i=1}^{10} k_B(i) = 38$.

Anta i punkt d) og e) at standardavvikene til K_0 og R er kjente, $\sigma_0 = 4$ og $\sigma_R = 2$, at korrelasjonen mellom K_0 og R er kjent, $\rho_{0R} = 5/16$, og at standardavviket σ_R og korrelasjonen ρ_{0R} er lik for de to kontrastmidlene, det vil si $\text{Var}(R_A) = \text{Var}(R_B) = 2^2$ og $\text{Corr}(K_0, R_A) = \text{Corr}(K_0, R_B) = 5/16$.

Følgende hypotese fremsettes: Forventet kontrastmål ved bruk av kontrastmiddel type A og type B er identiske. Denne hypotesen skal testes mot alternativet at de to forventningene er ulike.

d) Test hypotesen over på signifikansnivå 0.1 ved å bruke dataene i tabell 2 og 3.

Utlede styrken for denne testen for forskjell i forventet kontrastmål lik 2.

Et alternativ forsøksopplegget er at 10 forsøkspersoner får injisert kontrastmiddel type A i ene hånden og type B i andre hånden. Deretter blir det tatt røntgenbilde av begge hendene. Dette forsøksopplegget ble gjennomført, og gav observasjoner som i tabell 4.

Person (i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$k_A(i)$	29	38	26	32	40	43	37	31	38	36
$k_B(i)$	32	41	28	29	42	41	40	34	42	41

Tabell 4: Målt kontrast for person nr i ved bruk av kontrastmiddel type A, $k_A(i)$, og type B, $k_B(i)$. Her blir $\bar{k}_A = 1/10 \sum_{i=1}^{10} k_A(i) = 35$ og $\bar{k}_B = 1/10 \sum_{i=1}^{10} k_B(i) = 37$.

Vi skal nå teste samme hypotese som under punkt d).

e) Forklar kort hvorfor dette er et bedre forsøksopplegg.

Utfør en ny test på hypotesen fremsatt i punkt d) der du nyttiggjør deg dette forsøksopplegget. Bruk dataene fra tabell 4.

Sammenlikn dette med resultatet i punkt d) og kommenter.

Utlede styrken for denne testen for forskjell i forventet kontrastmål lik 2.

Sammenlikn med styrkeresultatet i punkt d) og kommenter.

Regn ut hvor mange forsøkspersoner vi måtte ha i forsøksopplegget i punkt d) for å få samme styrke som over.