Noregs teknisk–naturvitskaplege universitet
Institutt for matematiske fag

Nynorsk

Fagleg kontakt under eksamen:
John Tyssedal 73 59 35 34/ 41 64 53 76
Jo Eidsvik 73 59 01 53/ 90 12 74 72

EKSAMEN I EMNE TMA4245 STATISTIKK

15. mai 2009
Tid: 09:00–13:00

Hjelpemiddel: *Tabeller og formler i statistikk*, Tapir Forlag
K. Rottmann: *Matematisk formelsamling*
Kalkulator HP30S / CITIZEN SR-270X
Gult, stempla A5-ark med eigne handskrevne notat.

Sensuren fell: 9. juni 2009

Oppgåve 1 Vassverket

Eit vassverk har to pumper for å pumpe vatn frå ei drikkevasskjelde til eit vassreservoar. For å kunne pumpe vatn må minst ei av pumpene fungere. For ein vilkårleg dag la A_1 vere hendinga at pumpe 1 fungerer, og la A_2 vere hendinga at pumpe 2 fungerer. Frå tidlegare veit ein at $P(A_1) = 0.8$, $P(A_2) = 0.8$ og $P(A_1|A_2) = 0.9$.

a) Er hendingane A_1 og A_2 uavhengige? Er hendingane A_1 og A_2 disjunkte? Grunngje svara.

Finn sannsynet for at vassverket kan pumpe ein vilkårleg dag, det vil sei finn $P(A_1 \cup A_2)$.

Vassverket blir pålagt krav om at dei over tid skal kunne pumpe vatn i 997 av 1000 dagar. Dei bestemmer seg for å intallere ei ekstra pumpe slik at dei kan pumpe vatn dersom minst ei av dei tre pumpene fungerer. Den nye pumpa skal fungere uavhengig av dei to andre. La A_3 vere hendinga at den nye pumpa fungerer.

b) Kor stor må $P(A_3)$ vere for at sannsynet for å kunne pumpe vatn ein vilkårleg dag skal vere 0.997?

Gå ut i frå at sannsynet for at vassverket kan pumpe vatn ein dag er uavhengig av om det kunne pumpe dei føregåande dagane. La X vere talet på dagar til første gong vassverket ikkje kan pumpe vatn. Kva fordeling har X? Grunngje svaret. Kva blir $\mathrm{E}(X)$ etter at den tredje pumpa er installert?

Oppgåve 2 Avviksrapportar

Knut har ansvar for internkontrollen i ei større verksemd, og er oppteken av kor mange meldingar om alvorlege avvik som kjem inn.

La N vere talet på meldingar som kjem inn i eit tidsrom av lengde t. Vi forutset at meldingane kjem inn uavhengig av kvarandre, og at N er poissonfordelt med parameter λt;

$$f(n; \lambda t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} \exp(-\lambda t) \qquad\qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Det er kjent at $\lambda = 1.5$ meldingar / veke.

a) Kva er sannsynet for at det i eit tidsrom på ei veke ikkje kjem inn nokre meldingar om alvorlege avvik?

Kva er sannsynet for at det i eit tidsrom på fire veker kjem inn fleire enn to slike meldingar?

b) Knut reiser på ferie. Når han kjem tilbake tre veker seinare, er det komme inn ei melding om alvorleg avvik.

Kva er sannsynet for at meldinga kom inn i den første veka han var på ferie? Grunngje svaret.

La T vere tida frå Knut reiser på ferie til denne meldinga kom inn. Finn fordelinga til T. Vis utleiinga og argumenter for resultatet.

Knut har inntrykk av at avvik ikkje blir meldt inn fordi det er tidkrevjande, og han innfører eit nytt system for innmelding av alvorlege avvik. Det første året (52 veker) det nye systemet var i bruk kom det inn $N = 104$ meldingar.

Knut ønskjer å estimere λ basert på desse dataane.

c) Vis at sannsynsmaksimeringsestimatoren for λ er

$$\hat{\lambda}_{SME} = \frac{N}{52}$$

Finn forventning og varians for $\hat{\lambda}_{SME}$. Er $\hat{\lambda}_{SME}$ forventningsrett? Kva blir sannsynsmaksimeringsestimatet for λ?

Oppgåve 3 Kontrastmiddel

Effekten av ulike typer kontrastmiddel brukt ved røntgenundersøkelsar av hender skal studerast. Kontrastmiddelet blir injisert i handflata før røntgenbiletet blir teke. Ein ynskjer å minske strålingsfaren ved å ta få bileter - helst berre eit av kvar hand.

For å måle effekten har ein utvikla eit kontrastmål for eit bilete av ei hand. Utan kontrastmiddel kallast målet K_0 og det varierer frå person til person, men kan sjåast på som identisk for begge hendene på ein person. Tidligare erfaring tilseier at K_0 er normalfordelt med forventningsverdi μ_0 og standardavvik σ_0. Det vil sei at K_0 er $n(k_0; \mu_0, \sigma_0)$.

a) Gå i dette punktet ut i frå at $\mu_0 = 25$ og $\sigma_0 = 4$.

Finn følgjande sannsyn:

$P(K_0 \geq 30)$
$P(20 \leq K_0 < 30)$

Gå no ut i frå at μ_0 og σ_0 er ukjende. Ei studie på 10 forsøkspersonar blir brukt til å kartleggje kontrastmålet. Eit røntgenbilde utan bruk av kontrastmiddel blir teke av ei av hendene til kvar av dei 10 forsøkspersonane. Det resulterer i 10 uavhengige observasjonar av kontrastmålet K_0, sjå tabell 1.

Forsøksnr. i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$k_0(i)$	21	28	19	23	31	32	28	23	28	27

Tabell 1: Målt kontrast uten bruk av kontrastmiddel. Her blir $\bar{k}_0 = 1/10 \sum_{i=1}^{10} k_0(i) = 26$ og $\sum_{i=1}^{10}(k_0(i) - \bar{k}_0)^2 = 166$.

b) Utlei eit 90% konfidensintervall for forventa kontrastmål μ_0, og finn talsvar.

Ved bruk av kontrastmiddel blir kontrasten i røntgenbileta endra slik at kontrastmålet blir:

$$K = K_0 + R$$

der R er effekten av kontrastmiddelet.

Gå ut i frå at R er normalfordelt med forventning μ_R og standardavvik σ_R, dvs $n(r; \mu_R, \sigma_R)$. Vidare går vi ut i frå at K_0 og R har ein korrelasjon på ρ_{0R}, og at K er normalfordelt $n(k; \mu_K, \sigma_K)$.

c) Utlei uttrykk for forventninga μ_K og standardavviket σ_K til kontrastmålet ved bruk av kontrastmiddel.

Vi ønskjer no å samanlikne kontrastmåla ved bruk av to ulike kontrastmiddel, type A og type B. La effekten av kvar av desse vere R_A og R_B, og tilsvarande blir kontrastmåla:

$$K_A = K_0 + R_A$$

$$K_B = K_0 + R_B$$

Vi går ut i frå at alle variablane er normalfordelte, og at R_A og R_B er uavhengige. For å undersøkje kontrastmåla for dei to ulike kontrastmiddela gjennomfører vi et forsøksopplegg: For kvar type blir det gjort 10 forsøk. For dei 20 forsøkspersonane blir kontrastmiddelet injisert i ei av hendene, eit røntgenbilde blir teke, og kontrastmålet blir registrert. Dette gjev eit sett av uavhengige observasjonar av K_A og K_B, sjå tabell 2 og 3.

Forsøk nr (i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$k_A(i)$	29	38	26	32	40	43	37	31	38	36

Tabell 2: Målt kontrast ved bruk av kontrastmiddel A. Her blir $\bar{k_A} = 1/10 \sum_{i=1}^{10} k_A(i) = 35$.

Forsøk nr (i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$k_B(i)$	44	37	46	40	33	29	36	42	35	38

Tabell 3: Målt kontrast ved bruk av kontrastmiddel B. Her blir $\bar{k_B} = 1/10 \sum_{i=1}^{10} k_B(i) = 38$.

Gå i punkt d) og e) ut i frå at standardavvika til K_0 og R er kjende, $\sigma_0 = 4$ og $\sigma_R = 2$, at korrelasjonen mellom K_0 og R er kjend, $\rho_{0R} = 5/16$, og at standardavviket σ_R og korrelasjonen ρ_{0R} er lik for dei to kontrastmiddela, det vil sei $\text{Var}(R_A) = \text{Var}(R_B) = 2^2$ og $Corr(K_0, R_A) = Corr(K_0, R_B) = 5/16$.

Følgjande hypotese blir framsett: Forventa kontrastmål ved bruk av kontrastmiddel type A og type B er identiske. Denne hypotesen skal testast mot alternativet at dei to forventningane er ulike.

d) Test hypotesen over på signifikansnivå 0.1 ved å bruke dataane i tabell 2 og 3.

Utlei styrken for denne testen for forskjell i forventa kontrastmål lik 2.

Eit alternativ forsøksopplegg er at 10 forsøkspersoner får injisert kontrastmiddel type A i den eine handa og type B i den andre handa. Deretter blir det teke røntgenbilde av begge hendene. Dette forsøksopplegget blei gjennomført, og gav observasjonar som i tabell 4.

Person (i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$k_A(i)$	29	38	26	32	40	43	37	31	38	36
$k_B(i)$	32	41	28	29	42	41	40	34	42	41

Tabell 4: Målt kontrast for person nr i ved bruk av kontrastmiddel type A, $k_A(i)$, og type B, $k_B(i)$. Her blir $\bar{k}_A = 1/10 \sum_{i=1}^{10} k_A(i) = 35$ og $\bar{k}_B = 1/10 \sum_{i=1}^{10} k_B(i) = 37$.

Vi skal no teste same hypotese som under punkt d).

e) Forklar kort kvifor dette er eit betre forsøksopplegg.

Utfør ein ny test på hypotesen i punkt d) der du nyttiggjer deg dette forsøksopplegget. Bruk dataane frå tabell 4.

Samanlikn med resultatet i punkt d) og kommenter.

Utlei styrken for denne testen for forskjell i forventa kontrastmål lik 2.

Samanlikn med styrkeresultatet i punkt d) og kommenter.

Regn ut kor mange forsøkspersoner vi måtte ha i forsøksopplegget i punkt d) for å få same styrke som over.