i Forside mai 2021

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgåve i TMA4245 Statistisk

Eksamensdato: Fredag 14. mai, 2021

Eksamenstid (frå-til): 09.00 – 13.00

Hjelpemiddelkode/Tillatne hjelpemiddel: A / Alle hjelpemiddel tillatne

Fagleg kontakt under eksamen: Geir-Arne Fuglstad og Jarle Tufto
Tlf.: 45270806, 99705519

Teknisk hjelp under eksamen: NTNU Orakel
Tlf: 73 59 16 00

Får du tekniske problem under eksamen, må du ta kontakt for teknisk hjelp snarast mogleg, og seinast innan eksamenstida går ut. Viss du ikkje kjem gjennom med ein gong, hald linja til du får svar.

ANNAN INFORMASJON:

Gjer deg opp dine eigne meiningar og presiser i svara dine kva for føresetnadar du har lagt til grunn i tolking/avgrensing av oppgåva. Fagleg kontaktperson skal berre kontaktast dersom det er direkte feil eller manglar i oppgåvesettet.

Juks/plagiat: Eksamen skal vere eit individuelt, sjølvstendig arbeid. Det er tillate å bruke hjelpemiddel, men ver merksam på at du må følgje eventuelle føringar om kjeldetilvisingar under. Det er ikkje tillate å kommunisere med andre personar om oppgåva eller å distribuere utkast til svar. Slik kommunikasjon er rekna som juks. Alle svar vert kontrollert for plagiat. *Du kan lese meir om juks og plagiering på eksamen her*.

Varslingar: Dersom det oppstår behov for å gje beskjedar til kandidatane medan eksamen er i gang (f.eks. ved feil i oppgåvesettet), vil dette bli gjort via varslingar i Inspera. Eit varsel vil dukke opp som en dialogboks på skjermen i Inspera. Du kan finne att varselet ved å klikke på bjølla i øvre høgre hjørne på skjermen. Det vil i tillegg bli sendt SMS til alle kandidatar for å sikre at ingen går glipp av viktig informasjon. Ha mobiltelefonen din innan rekkevidde.

Vekting av oppgåvene: Det er totalt 100 poeng. Oppgåver 1--6 blir retta automatisk og tel 5 poeng kvar. Oppgåver 7a, 7b, 7c, 7d, 8a, 8b og 9a blir retta manuelt og tel 10 poeng kvar.

Generell informasjon: I oppgåve 1--6 skal de berre oppgi korrekt svar og inga grunngiving. Bruk fleire desimalar i mellomrekningar enn i det endelege svaret for å unngå avrundingsfeil. **Følg instruksane for tal på desimalar i endeleg svar. Viss ikkje kan svaret bli vurdert til feil!** For oppgåver 7a, 7b, 7c, 7d, 8a, 8b og 9a skal alle svar grunngivast og all naturleg mellomrekning skal inkluderast. Det må vera heilt tydeleg korleis ein har gått fram for å komma fram til svara.

OM LEVERING: Ein del av oppgåvene krev at du lastar opp filer med løysinga di. Du skal lasta opp ein (og berre ein) fil for kvar av desse oppgåvene. Alle filene må vera i pdf-format! Det blir anbefalt sterkt at ein lastar opp ei løysing straks ein er ferdig med ei oppgåve. Ein bør ikkje lasta opp alle løysingane heilt på slutten av eksamenstida, då dette lett kan føra til tekniske problem.

Slik svarar du på oppgåvene: Alle oppgåver som *ikkje* er av typen filopplasting, må du svara på direkte i Inspera. I Inspera vert svara dine lagra kvart 15. sekund. NB**!** Klipp og lim frå andre program er ikkje tilrådd, då dette kan leie til at formatering og element (bilete, tabellar osb.) forsvinn.

Filopplasting: Vær merksam på at alle filer må vere lasta opp i Inspera før eksamenstida går ut. Det er lagt **30 minutt** til ordinær eksamenstid for eventuell digitalisering av handteikningar og opplasting av filer. Tilleggstida er satt av til innlevering, og inngår i attståande eksamenstid som vises i øvre venstre hjørne på skjermen.

NB! Det er ditt eige ansvar å sjå til at du lastar opp riktig(e) og intakt(e) fil(er). Kontroller filene du har lasta opp ved å klikke "Last ned" når du står i filopplastingsoppgåva. Alle filer kan fjernast og byttas ut så lengje prøven er open.

Slik digitaliserer du handteikningane dine.
Slik lagrar du dokumentet ditt som PDF.
Slik fjernar du forfattarinformasjon frå filen(e) du skal levere.

Svara dine vert levert automatisk når eksamenstida er ute og prøven stenger, under føresetnad av at du har svart på minst ei oppgåve. Dette skjer sjølv om du ikkje har klikka «Lever og gå tilbake til Dashboard» på siste side i oppgåvesettet. Du kan opne og redigere svara dine så lenge prøven er open. Dersom du ikkje har svart på nokon av oppgåvene ved prøveslutt, vert ingenting levert. Dette vil bli sett på som "ikkje møtt" til eksamen.

Trekk/avbroten eksamen: Blir du sjuk under eksamen, eller av andre grunnar ønskjer å levere blankt/trekke deg, gå til "hamburgermenyen" i øvre høgre hjørne og vel «Lever blankt». Du kan ikkje angra dette, sjølv om prøven framleis er open.

Tilgang til svara dine: Du finn svara dine i Arkiv etter at sluttida for eksamen er passert.

1 # 1A

Oppgåve 1

Eit datasett består av sju målingar: 4, 6, 5, 3, 5, 1 og 3. Rekn ut følgjande storleikar. **Bruk tre desimalar i mellomrekningar og oppgi svara avrunda til ein desimal.**

- Gjennomsnitt: ☐.
- Median: ☐.
- Empirisk varians: ☐.

Maks poeng: 5

2 # 1B

Oppgåve 1

Eit datasett består av sju målingar: 4, 5, 3, 4, 3, 2 og 1. Rekn ut følgjande storleikar. **Bruk tre desimalar i mellomrekningar og oppgi svara avrunda til ein desimal.**

- Gjennomsnitt: ☐.
- Median: ☐.
- Empirisk varians: ☐.

Maks poeng: 5

3 1C

Oppgåve 1

Eit datasett består av sju målingar: 2, 6, 4, 6, 5, 3 og 3. Rekn ut følgjande storleikar. **Bruk tre desimalar i mellomrekningar og oppgi svara avrunda til ein desimal.**

- Gjennomsnitt: ☐.
- Median: ☐.
- Empirisk varians: ☐.

Maks poeng: 5

4 1D

Oppgåve 1

Eit datasett består av sju målingar: 2, 2, 1, 5, 4, 2 og 3. Rekn ut følgjande storleikar. **Bruk tre desimalar i mellomrekningar og oppgi svara avrunda til ein desimal.**

- Gjennomsnitt: ☐.
- Median: ☐.
- Empirisk varians: ☐.

Maks poeng: 5

5 2A

Oppgåve 2

Gå ut i frå at X er ein standard normalfordelt stokastisk variabel med sannsynstettleik $f_X(x)$. Vi har to hendingar $A = \{X \leq 3\}$ og $B = \{X \geq 3\}$. Bestem om kvar av dei følgjande fire utsegna er sanne eller usanne.

1. $\mathrm{P}(A \cap B) = f_X(3)$.

Vel eitt alternativ

- Sann
- Usann

2. $\mathrm{P}(A \cap B) = 0$.

Vel eitt alternativ

- Sann
- Usann

3. A og B er disjunkte hendingar.

Vel eitt alternativ

- Sann
- Usann

4. A og B er avhengige hendingar.

Vel eitt alternativ

- Sann
- Usann

Maks poeng: 5

6 2B

Oppgåve 2

Gå ut i frå at X er ein gammafordelt stokastisk variabel med sannsynstettleik $f_X(x)$. Vi har to hendingar $A = \{X \leq 2\}$ og $B = \{X \geq 2\}$. Bestem om kvar av dei følgjande fire utsegna er sanne eller usanne.

1. $\mathrm{P}(A \cap B) = f_X(2)$.

Vel eitt alternativ

- Sann
- Usann

2. $\mathrm{P}(A \cap B) = 0$.

Vel eitt alternativ

- Sann
- Usann

3. A og B er disjunkte hendingar.

Vel eitt alternativ

- Sann
- Usann

4. A og B er avhengige hendingar.

Vel eitt alternativ

- Sann
- Usann

Maks poeng: 5

7 2C

Oppgåve 2

Gå ut i fra at X er ein t-fordelt (med 10 frihetsgrader) stokastisk variabel med sannsynstettleik $f_X(x)$. Vi har to hendingar $A = \{X \leq -1\}$ og $B = \{X \geq -1\}$. Bestem om kvar av dei følgjande fire utsegna er sanne eller usanne.

1. $\mathrm{P}(A \cap B) = f_X(-1)$.

Vel eitt alternativ

- Sann
- Usann

2. $\mathrm{P}(A \cap B) = 0$.

Vel eitt alternativ

- Sann
- Usann

3. A og B er disjunkte hendingar.

Vel eitt alternativ

- Sann
- Usann

4. A og B er avhengige hendingar.

Vel eitt alternativ

- Sann
- Usann

Maks poeng: 5

8 2D

Oppgave 2

Gå ut i frå at X er ein kji-kvadratfordelt (med 10 frihetsgrader) stokastisk variabel med sannsynstettleik $f_X(x)$. Vi har to hendingar $A = \{X \leq 10\}$ og $B = \{X \geq 10\}$. Bestem om kvar av dei følgjande fire utsegna er sanne eller usanne.

1. $\mathrm{P}(A \cap B) = f_X(10)$.

Vel eitt alternativ

- Sann
- Usann

2. $\mathrm{P}(A \cap B) = 0$.

Vel eitt alternativ

- Sann
- Usann

3. A og B er disjunkte hendingar.

Vel eitt alternativ

- Sann
- Usann

4. A og B er avhengige hendingar.

Vel eitt alternativ

- Sann
- Usann

Maks poeng: 5

9 3A

Oppgåve 3

Vi trekkjer 5 tilfeldig valte kort frå ein vanleg kortstokk (52 kort, 13 av kvar farge). Oppgi svara under som heiltal.

- Kva vert talet på moglege utfall (talet på moglege ikke-ordna utval)?
- Kor mange måtar kan vi trekkje 5 kort som alle er av farge hjarter?

Maks poeng: 5

10 3B

Oppgåve 3

Vi trekkjer 5 tilfeldig valte kort frå ein vanleg kortstokk (52 kort, 13 av kvar farge). Oppgi svara under som heiltal.

- Kva vert talet på moglege utfall (talet på moglege ikke-ordna utval)?
- Kor mange måtar kan vi trekkje straight flush (alle kort i same farge og i rekkefølge, til dømes kløver 8, kløver 9, kløver 10, kløver knekt, kløver dame)? **Merk at Ess kan være fyrste kort eller siste kort in ein straight flush.**

Maks poeng: 5

11 3C

Oppgåve 3

Vi trekkjer 5 tilfeldig valte kort frå ein vanleg kortstokk (52 kort, 13 av kvar farge). Oppgi svara under som heiltal.

- Kva vert talet på moglege utfall (talet på moglege ikke-ordna utval)?
- Kor mange måtar kan vi trekkje 5 kort som alle er billedkort?

Maks poeng: 5

12 3D

Oppgåve 3

Vi trekkjer 5 tilfeldig valte kort frå ein vanleg kortstokk (52 kort, 13 av kvar farge). Oppgi svara under som heiltal.

- Kva vert talet på moglege utfall (talet på moglege ikke-ordna utval)?
- Kor mange måtar kan vi trekkje 5 kort der 4 er Ess?

Maks poeng: 5

13 4A

Oppgåve 4

La X vere summen av talet på auge når vi kastar to terningar og la $Z = 10X + 5$. Rekn ut følgjande sannsyn og oppgi svara runda av til tre desimalar.

- $P(X < 4) =$
- $P(Z \leq 35) =$
- $P(Z = 25) =$
- $P(Z = 25 | X < 4) =$

Maks poeng: 5

14 4B

Oppgåve 4

La X vere summen av talet på auge når vi kastar to terningar og la $Z = 5X + 10$. Rekn ut følgjande sannsyn og oppgi svara runda av til tre desimalar.

- $P(X > 10) =$
- $P(Z \geq 65) =$
- $P(Z = 70) =$
- $P(Z = 70 | X > 10) =$

Maks poeng: 5

15 4C

Oppgåve 4

La X vere summen av talet på auge når vi kastar to terningar og la $Z = 2X + 10$. Rekn ut følgjande sannsyn og oppgi svara runda av til tre desimalar.

- $P(X \leq 4) =$
- $P(Z < 20) =$
- $P(Z = 14) =$
- $P(Z = 14 | X \leq 4) =$

Maks poeng: 5

16 **4D**

Oppgåve 4

La X vere summen av talet på auge når vi kastar to terningar og la $Z = 10X$. Rekn ut følgjande sannsyn og oppgi svara runda av til tre desimalar.

- $P(X \leq 4) =$
- $P(Z < 50) =$
- $P(Z = 20) =$
- $P(Z = 20 | X \leq 4) =$

Maks poeng: 5

17 **5A**

Oppgåve 5

Anta at X er ein normalfordelt stokastisk variabel med forventningsverdi 4.5 og standardavvik 3, og at Y er ein normalfordelt stokastisk variabel med forventningsverdi -1.5 og standardavvik 4. Anta i tillegg at X og Y er uavhengige stokastiske variablar. Rekn ut dei følgjande sannsyna og oppgi svara avrunda til tre desimalar.

- $\mathrm{P}(X > 3) =$.
- $\mathrm{P}(X + Y > 3) =$.
- $\mathrm{P}(X + Y > 3 | Y = 3) =$.

Maks poeng: 5

18 5B

Oppgåve 5

Anta at X er ein normalfordelt stokastisk variabel med forventningsverdi 2.5 og standardavvik 3, og at Y er ein normalfordelt stokastisk variabel med forventningsverdi -3 og standardavvik 4. Anta i tillegg at X og Y er uavhengige stokastiske variablar. Rekn ut dei følgjande sannsyna og oppgi svara avrunda til tre desimalar.

- $\mathrm{P}(X > 3) =$ ☐.
- $\mathrm{P}(X + Y > 3) =$ ☐.
- $\mathrm{P}(X + Y > 3 | Y = 2) =$ ☐.

Maks poeng: 5

19 5C

Oppgåve 5

Anta at X er ein normalfordelt stokastisk variabel med forventningsverdi 2 og standardavvik 4, og at Y er ein normalfordelt stokastisk variabel med forventningsverdi 0 og standardavvik 3. Anta i tillegg at X og Y er uavhengige stokastiske variablar. Rekn ut dei følgjande sannsyna og oppgi svara avrunda til tre desimalar.

- $\mathrm{P}(X > 3) =$ ☐.
- $\mathrm{P}(X + Y > 3) =$ ☐.
- $\mathrm{P}(X + Y > 3 | Y = 1) =$ ☐.

Maks poeng: 5

20 5D

Oppgåve 5

Anta at X er ein normalfordelt stokastisk variabel med forventningsverdi -1 og standardavvik 4, og at Y er ein normalfordelt stokastisk variabel med forventningsverdi -1 og standardavvik 3. Anta i tillegg at X og Y er uavhengige stokastiske variablar. Rekn ut dei følgjande sannsyna og oppgi svara avrunda til tre desimalar.

- $\mathrm{P}(X > 3) =$ ☐.
- $\mathrm{P}(X + Y > 3) =$ ☐.
- $\mathrm{P}(X + Y > 3 | Y = 3) =$ ☐.

Maks poeng: 5

21 6A

Oppgåve 6

Vi ser på to stokastiske variablar X og Y. Vi kjenner forventningsverdiane og variansane: $\mathrm{E}[X] = 2$, $\mathrm{Var}[X] = 2$, $\mathrm{E}[Y] = -1$ og $\mathrm{Var}[Y] = 1$. I tillegg kjenner vi kovariansen $\mathrm{Cov}[X, Y] = 0.5$. Rekn ut storleikane under og oppgi svara avrunda til ein desimal.

- $\mathrm{E}[X + Y] =$ ☐.
- $\mathrm{Var}[X + Y] =$ ☐.

Maks poeng: 5

22 6B

Oppgåve 6
Vi ser på to stokastiske variablar X og Y. Vi kjenner forventningsverdiane og variansane: $\mathrm{E}[X] = -1$, $\mathrm{Var}[X] = 1$, $\mathrm{E}[Y] = 1$ og $\mathrm{Var}[Y] = 1.5$. I tillegg kjenner vi kovariansen $\mathrm{Cov}[X, Y] = 0.25$. Rekn ut storleikane under og oppgi svara avrunda til ein desimal.

- $\mathrm{E}[X + Y] =$ ☐.
- $\mathrm{Var}[X + Y] =$ ☐.

Maks poeng: 5

23 6C

Oppgåve 6
Vi ser på to stokastiske variablar X og Y. Vi kjenner forventningsverdiane og variansane: $\mathrm{E}[X] = 2$, $\mathrm{Var}[X] = 2$, $\mathrm{E}[Y] = 1$ og $\mathrm{Var}[Y] = 2$. I tillegg kjenner vi kovariansen $\mathrm{Cov}[X, Y] = 0.5$. Rekn ut storleikane under og oppgi svara avrunda til ein desimal.

- $\mathrm{E}[X + Y] =$ ☐.
- $\mathrm{Var}[X + Y] =$ ☐.

Maks poeng: 5

24 6D

Oppgåve 6

Vi ser på to stokastiske variablar X og Y. Vi kjenner forventningsverdiane og variansane: $\mathbf{E}[X] = 3$, $\mathbf{Var}[X] = 1.5$, $\mathbf{E}[Y] = -4$ og $\mathbf{Var}[Y] = 1.5$. I tillegg kjenner vi kovariansen $\mathbf{Cov}[X, Y] = 0.25$. Rekn ut storleikane under og oppgi svara avrunda til ein desimal.

- $\mathbf{E}[X + Y] =$ ☐.
- $\mathbf{Var}[X + Y] =$ ☐.

Maks poeng: 5

25 7A

Oppgåve 7

Gå ut i frå at lønnsinntekta Y til ein tilfeldig valt lønnstakar frå ein populasjon er ein kontinuerleg stokastisk variabel med sannsynstettleik

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{\lambda y_0^\lambda}{y^{\lambda+1}}, & \text{for} \quad y \geq y_0, \\ 0, & \text{for} \quad y < y_0, \end{cases}$$

kor $\lambda > 0$ er ein ukjend parameter og $y_0 = 300\,000$ kr er ein kjend minsteløn fastsett av myndigheitene.

a)

Gå i dette punktet ut i frå at $\lambda = 1.0$.

- Finn den kumulative fordelingsfunksjonen til lønnsinntekt Y.
- Bruk den kumulative fordelingsfunksjonen til å berekne sannsynet for at den minste lønnsinntekta i eit tilfeldig utval på $n = 10$ lønnstakarar er mindre enn 310 000 kroner.

Vi observerer eit tilfeldig utval på $n = 10$ lønnsinntekter, $y_1, y_2, \ldots, y_n$, gitt ved 456000, 578000, 325000, 324000, 382000, 1498000, 594000, 405000, 510000 og 326000 kr. Det oppgjevast at $\sum_{i=1}^n \ln(y_i/y_0) = 4.68$.

b)

- Utlei sannsynsmaksimeringsestimatoren av λ for eit tilfeldig utval av storleik n.
- Rekn ut sannsynsmakssimeringsestimatet av λ for dataene gjeve over.

c)

- La $X = 2\lambda \ln(Y/y_0)$. Vis at X er kji-kvadratfordelt med 2 fridomsgradar. Kva blir fordelinga til $\sum_{i=1}^n 2\lambda \ln(Y_i/y_0)$? Gjev ein grunn for svaret.
- Utlei eit 95%-konfidensintervall for λ basert på eit tilfeldig utvalg av storleik n. Rekn ut intervallet for dataene gjeve over.

d)

I denne oppgåva kan du gå ut i frå at medianen til Y er gjeve ved uttrykket $\mu^* = 2^{1/\lambda} y_0$ for $\lambda > 0$. Vi ynskjer å teste om dataene gjeve over gir grunnlag for å seie at medianløna i populasjonen, μ^*, er større enn 600 000 kr.

- Vis at dette er ekvivalent med hypotesetesten $H_0 : \lambda = 1.0$ versus $H_1 : \lambda < 1.0$.
- Konstruer og gjennomfør testen for dataene over og med eit signifikansnivå lik 0.05. Kva blir konklusjonen?

Last opp fila her. Maks ei fil.

Det er høve til å laste opp følgjande filtypar: **.pdf** Maksimal filstorleik er **50 GB**.

Vel fil for opplasting

Maks poeng: 40

26 # 7B

Oppgåve 7

Gå ut i frå at lønnsinntekta Y til ein tilfeldig valt lønnstakar frå ein populasjon er ein kontinuerleg stokastisk variabel med sannsynstettleik

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{\lambda y_0^\lambda}{y^{\lambda+1}}, & \text{for} \quad y \geq y_0, \\ 0, & \text{for} \quad y < y_0, \end{cases}$$

kor $\lambda > 0$ er ein ukjend parameter og $y_0 = 300\,000$ kr er ein kjend minsteløn fastsett av myndigheitene.

a)

Gå i dette punktet ut i frå at $\lambda = 1.36$.

- Finn den kumulative fordelingsfunksjonen til lønnsinntekt Y.
- Bruk den kumulative fordelingsfunksjonen til å berekne sannsynet for at den minste lønnsinntekta i eit tilfeldig utval på $n = 8$ lønnstakarar er mindre enn 310 000 kroner.

Vi observerer eit tilfeldig utval på $n = 8$ lønnsinntekter, $y_1, y_2, \ldots, y_n$, gitt ved 417000, 501000, 320000, 319000, 363000, 1056000, 512000, 379000 kr. Det oppgjevast at $\sum_{i=1}^{n} \ln(y_i/y_0) = 3.19$.

b)

- Utlei sannsynsmaksimeringsestimatoren av λ for eit tilfeldig utval av storleik n.
- Rekn ut sannsynsmaksimeringsestimatet av λ for dataene gjeve over.

c)

- La $X = 2\lambda \ln(Y/y_0)$. Vis at X er kji-kvadratfordelt med 2 fridomsgradar. Kva blir fordelinga til $\sum_{i=1}^{n} 2\lambda \ln(Y_i/y_0)$? Gjev ein grunn for svaret.
- Utlei eit 95%-konfidensintervall for λ basert på eit tilfeldig utvalg av storleik n. Rekn ut intervallet for dataene gjeve over.

d)

I denne oppgåva kan du gå ut i frå at medianen til Y er gjeve ved uttrykket $\mu^* = 2^{1/\lambda} y_0$ for $\lambda > 0$. Vi ynskjer å teste om dataene gjeve over gir grunnlag for å seie at medianløna i populasjonen, μ^*, er større enn 500 000 kr.

- Vis at dette er ekvivalent med hypotesetesten $H_0 : \lambda = 1.36$ versus $H_1 : \lambda < 1.36$.
- Konstruer og gjennomfør testen for dataene over og med eit signifikansnivå lik 0.05. Kva blir konklusjonen?

Last opp fila her. Maks ei fil.

Det er høve til å laste opp følgjande filtypar: **.pdf** Maksimal filstorleik er **50 GB**.

Vel fil for opplasting

Maks poeng: 40

27 **7C**

Oppgåve 7

Gå ut i frå at lønnsinntekta Y til ein tilfeldig valt lønnstakar frå ein populasjon er ein kontinuerleg stokastisk variabel med sannsynstettleik

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{\lambda y_0^\lambda}{y^{\lambda+1}}, & \text{for} \quad y \geq y_0, \\ 0, & \text{for} \quad y < y_0, \end{cases}$$

kor $\lambda > 0$ er ein ukjend parameter og $y_0 = 400\,000$ kr er ein kjend minsteløn fastsett av myndigheitene.

a)
Gå i dette punktet ut i frå at $\lambda = 1.24$.

- Finn den kumulative fordelingsfunksjonen til lønnsinntekt Y.
- Bruk den kumulative fordelingsfunksjonen til å berekne sannsynet for at den minste lønnsinntekta i eit tilfeldig utval på $n = 6$ lønnstakarar er mindre enn 410 000 kroner.

Vi observerer eit tilfeldig utval av $n = 6$ lønnsinntekter, $y_1, y_2, \ldots, y_n$, gitt ved 514000, 593000, 420000, 419000, 463000, 1050000 kr. Det oppgjevast at $\sum_{i=1}^n \ln(y_i/y_0) = 1.85$.

b)

- Utlei sannsynsmaksimeringsestimatoren av λ for eit tilfeldig utval av storleik n.
- Rekn ut sannsynsmaksimeringsestimatet av λ for dataene gjeve over.

c)

- La $X = 2\lambda \ln(Y/y_0)$. Vis at X er kji-kvadratfordelt med 2 fridomsgradar. Kva blir fordelinga til $\sum_{i=1}^n 2\lambda \ln(Y_i/y_0)$? Gjev ein grunn for svaret.
- Utlei eit 95%-konfidensintervall for λ basert på eit tilfeldig utvalg av storleik n. Rekn ut intervallet for dataene gjeve over.

d)
I denne oppgåva kan du gå ut i frå at medianen til Y er gjeve ved uttrykket $\mu^* = 2^{1/\lambda} y_0$ for $\lambda > 0$. Vi ynskjer å teste om dataene gjeve over gir grunnlag for å seie at medianløna i populasjonen, μ^*, er større enn 700 000 kr.

- Vis at dette er ekvivalent med hypotesetesten $H_0 : \lambda = 1.24$ versus $H_1 : \lambda < 1.24$.
- Konstruer og gjennomfør testen for dataene over og med eit signifikansnivå lik 0.05. Kva blir konklusjonen?

Last opp fila her. Maks ei fil.

Det er høve til å laste opp følgjande filtypar: **.pdf** Maksimal filstorleik er **50 GB**.

Vel fil for opplasting

Maks poeng: 40

28 **7D**

Oppgåve 7

Gå ut i frå at lønnsinntekta Y til ein tilfeldig valt lønnstakar frå ein populasjon er ein kontinuerleg stokastisk variabel med sannsynstettleik

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{\lambda y_0^\lambda}{y^{\lambda+1}}, & \text{for} \quad y \geq y_0, \\ 0, & \text{for} \quad y < y_0, \end{cases}$$

kor $\lambda > 0$ er ein ukjend parameter og $y_0 = 400\,000$ kr er ein kjend minsteløn fastsett av myndigheitene.

a)

Gå i dette punktet ut i frå at $\lambda = 3.11$.

- Finn den kumulative fordelingsfunksjonen til lønnsinntekt Y.
- Bruk den kumulative fordelingsfunksjonen til å berekne sannsynet for at den minste lønnsinntekta i eit tilfeldig utval på $n = 12$ lønnstakarar er mindre enn 410 000 kroner.

Vi observerer eit tilfeldig utval av $n = 12$ lønnsinntekter, $y_1, y_2, \ldots, y_n$, gitt ved 584000, 722000, 430000, 429000, 497000, 1701000, 740000, 524000, 645000, 431000, 802000, 586000 kr. Det oppgjevast at $\sum_{i=1}^n \ln(y_i/y_0) = 5.29$.

b)

- Utlei sannsynsmaksimeringsestimatoren av λ for eit tilfeldig utval av storleik n.
- Rekn ut sannsynsmaksimeringsestimatet av λ for dataene gjeve over.

c)

- La $X = 2\lambda \ln(Y/y_0)$. Vis at X er kji-kvadratfordelt med 2 fridomsgradar. Kva blir fordelinga til $\sum_{i=1}^n 2\lambda \ln(Y_i/y_0)$? Gjev ein grunn for svaret.
- Utlei eit 95%-konfidensintervall for λ basert på eit tilfeldig utvalg av storleik n. Rekn ut intervallet for dataene gjeve over.

d)

I denne oppgåva kan du gå ut i frå at medianen til Y er gjeve ved uttrykket $\mu^* = 2^{1/\lambda} y_0$ for $\lambda > 0$. Vi ynskjer å teste om dataene gjeve over gir grunnlag for å seie at medianløna i populasjonen, μ^*, er større enn 500 000 kr.

- Vis at dette er ekvivalent med hypotesetesten $H_0 : \lambda = 3.11$ versus $H_1 : \lambda < 3.11$.
- Konstruer og gjennomfør testen for dataene over og med eit signifikansnivå lik 0.05. Kva blir konklusjonen?

Last opp fila her. Maks ei fil.

Det er høve til å laste opp følgjande filtypar: **.pdf** Maksimal filstorleik er **50 GB**.

Vel fil for opplasting

Maks poeng: 40

29 # 8A

Oppgåve 8

Vi ser på ein normalpopulasjon med ukjend forventningsverdi μ og kjend varians $\sigma^2 = 1$. Målet er å testa nullhypotesen $H_0 : \mu = 5$ mot alternativ hypotese $H_1 : \mu < 5$. Dette skal gjerast ved signifikansnivå $\alpha = 0.05$ med et tilfeldig utval $X_1, X_2, \ldots, X_n$ frå normalpopulasjonen.

a)
Anta at ein vel å forkasta H_0 dersom $\bar{x} \leq 5 - \frac{z_\alpha}{\sqrt{n}}$, der $\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$ og z_α er verdien slik at $\mathrm{P}(Z > z_\alpha) = \alpha$ for ein standardnormalfordelt stokastisk variabel Z.

- Rekn ut sannsynet for å gjera ein type I feil.
- Rekn ut styrken til hypotesetesten når $n = 10$ og sann forventningsverdi er $\mu = 4.5$.

b)
Anta at ein forskar gjer 2 uavhengige tilfeldige utval kvar av storleik $n = 10$. Anta no at ein i staden for avgjerdsregelen angitt i a) vel å forkasta dersom minst eitt av dei to utvala oppfyller forkastningsregelen $\bar{x} \leq 5 - \frac{z_\alpha}{\sqrt{n}}$.

- Rekn ut sannsynet for å gjera ein type I feil med forskarens fremgangsmåte. Det vil seia sannsynet for at minst eitt av dei to utvala oppfyller forkastningsregelen i a) når nullhypotesen er sann.
- Forklar kvifor sannsynet for ein type I feil er større i framgangsmåten til forskaren enn svaret i a).
- Vi skal nå endra avgjerdsregelen og forkasta H_0 dersom minst eitt av dei to utvala oppfyller forkastningsregelen $\bar{x} \leq k$. Bestem talverdien til k som gir signifikansnivå 0.05.

Last opp fila her. Maks ei fil.

Det er høve til å laste opp følgjande filtypar: **.pdf** Maksimal filstorleik er **50 GB**.

Vel fil for opplasting

Maks poeng: 20

30 # 8B

Oppgåve 8

Vi ser på ein normalpopulasjon med ukjend forventningsverdi μ og kjend varians $\sigma^2 = 1$. Målet er å testa nullhypotesen $H_0 : \mu = 5$ mot alternativ hypotese $H_1 : \mu < 5$. Dette skal gjerast ved signifikansnivå $\alpha = 0.10$ med et tilfeldig utval $X_1, X_2, \ldots, X_n$ frå normalpopulasjonen.

a)
Anta at ein vel å forkasta H_0 dersom $\bar{x} \leq 5 - \frac{z_\alpha}{\sqrt{n}}$, der $\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$ og z_α er verdien slik at $\mathrm{P}(Z > z_\alpha) = \alpha$ for ein standardnormalfordelt stokastisk variabel Z.

- Rekn ut sannsynet for å gjera ein type I feil.
- Rekn ut styrken til hypotesetesten når $n = 10$ og sann forventningsverdi er $\mu = 4.5$.

b)
Anta at ein forskar gjer 2 uavhengige tilfeldige utval kvar av storleik $n = 10$. Anta no at ein i staden for avgjerdsregelen angitt i a) vel å forkasta dersom minst eitt av dei to utvala oppfyller forkastningsregelen $\bar{x} \leq 5 - \frac{z_\alpha}{\sqrt{n}}$.

- Rekn ut sannsynet for å gjera ein type I feil med forskarens fremgangsmåte. Det vil seia sannsynet for at minst eitt av dei to utvala oppfyller forkastningsregelen i a) når nullhypotesen er sann.
- Forklar kvifor sannsynet for ein type I feil er større i framgangsmåten til forskaren enn svaret i a).
- Vi skal nå endra avgjerdsregelen og forkasta H_0 dersom minst eitt av dei to utvala oppfyller forkastningsregelen $\bar{x} \leq k$. Bestem talverdien til k som gir signifikansnivå 0.10.

Last opp fila her. Maks ei fil.

Det er høve til å laste opp følgjande filtypar: **.pdf** Maksimal filstorleik er **50 GB**.

Vel fil for opplasting

Maks poeng: 20

31 **8C**

Oppgåve 8

Vi ser på ein normalpopulasjon med ukjend forventningsverdi μ og kjend varians $\sigma^2 = 1$. Målet er å testa nullhypotesen $H_0 : \mu = 5$ mot alternativ hypotese $H_1 : \mu < 5$. Dette skal gjerast ved signifikansnivå $\alpha = 0.05$ med et tilfeldig utval $X_1, X_2, \ldots, X_n$ frå normalpopulasjonen.

a)
Anta at ein vel å forkasta H_0 dersom $\bar{x} \leq 5 - \frac{z_\alpha}{\sqrt{n}}$, der $\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$ og z_α er verdien slik at $\mathrm{P}(Z > z_\alpha) = \alpha$ for ein standardnormalfordelt stokastisk variabel Z.

- Rekn ut sannsynet for å gjera ein type I feil.
- Rekn ut styrken til hypotesetesten når $n = 20$ og sann forventningsverdi er $\mu = 4.5$.

b)
Anta at ein forskar gjer 2 uavhengige tilfeldige utval kvar av storleik $n = 20$. Anta no at ein i staden for avgjerdsregelen angitt i a) vel å forkasta dersom minst eitt av dei to utvala oppfyller forkastningsregelen $\bar{x} \leq 5 - \frac{z_\alpha}{\sqrt{n}}$.

- Rekn ut sannsynet for å gjera ein type I feil med forskarens fremgangsmåte. Det vil seia sannsynet for at minst eitt av dei to utvala oppfyller forkastningsregelen i a) når nullhypotesen er sann.
- Forklar kvifor sannsynet for ein type I feil er større i framgangsmåten til forskaren enn svaret i a).
- Vi skal nå endra avgjerdsregelen og forkasta H_0 dersom minst eitt av dei to utvala oppfyller forkastningsregelen $\bar{x} \leq k$. Bestem talverdien til k som gir signifikansnivå 0.05.

Last opp fila her. Maks ei fil.

Det er høve til å laste opp følgjande filtypar: **.pdf** Maksimal filstorleik er **50 GB**.

Vel fil for opplasting

Maks poeng: 20

32 # 8D

Oppgåve 8

Vi ser på ein normalpopulasjon med ukjend forventningsverdi μ og kjend varians $\sigma^2 = 1$. Målet er å testa nullhypotesen $H_0 : \mu = 5$ mot alternativ hypotese $H_1 : \mu < 5$. Dette skal gjerast ved signifikansnivå $\alpha = 0.10$ med et tilfeldig utval $X_1, X_2, \ldots, X_n$ frå normalpopulasjonen.

a)
Anta at ein vel å forkasta H_0 dersom $\bar{x} \leq 5 - \frac{z_\alpha}{\sqrt{n}}$, der $\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$ og z_α er verdien slik at $\mathrm{P}(Z > z_\alpha) = \alpha$ for ein standardnormalfordelt stokastisk variabel Z.

- Rekn ut sannsynet for å gjera ein type I feil.
- Rekn ut styrken til hypotesetesten når $n = 20$ og sann forventningsverdi er $\mu = 4.5$.

b)
Anta at ein forskar gjer 2 uavhengige tilfeldige utval kvar av storleik $n = 20$. Anta no at ein i staden for avgjerdsregelen angitt i a) vel å forkasta dersom minst eitt av dei to utvala oppfyller forkastningsregelen $\bar{x} \leq 5 - \frac{z_\alpha}{\sqrt{n}}$.

- Rekn ut sannsynet for å gjera ein type I feil med forskarens fremgangsmåte. Det vil seia sannsynet for at minst eitt av dei to utvala oppfyller forkastningsregelen i a) når nullhypotesen er sann.
- Forklar kvifor sannsynet for ein type I feil er større i framgangsmåten til forskaren enn svaret i a).
- Vi skal nå endra avgjerdsregelen og forkasta H_0 dersom minst eitt av dei to utvala oppfyller forkastningsregelen $\bar{x} \leq k$. Bestem talverdien til k som gir signifikansnivå 0.10.

Last opp fila her. Maks ei fil.

Det er høve til å laste opp følgjande filtypar: **.pdf** Maksimal filstorleik er **50 GB**.

Vel fil for opplasting

Maks poeng: 20

33 **9A**

Oppgåve 9

Vi bruker den lineære regresjonsmodellen

$$Y_i = \ln(x_i)\beta + \epsilon_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

hvor $\ln$ er den naturlege logaritmen, $x_i > 0$ er ein kovariat, β er koeffisienten til kovariaten, og $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$ er uavhengige og normalfordelte stokastiske variablar med same forventningsverdi 0 og **kjente** varians $\sigma^2 = 2$. Du skal bruka estimatoren $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) Y_i}{\sum_{i=1}^{n} (\ln(x_i))^2}$ for β.

- Vis at $\hat{\beta}$ er forventningsrett og bestem variansen til $\hat{\beta}$.
- Skriv opp eit uttrykk for eit 95% prediksjonsintervall for ein ny verdi Y med kovariatverdi x. Du må grunngi val av uttrykk, men treng ikkje å utlede det.
- Finn talverdien til prediksjonsintervallet når $x = 2$, $n = 10$, $\sum_{i=1}^{10} \ln(x_i) y_i = 4$ og $\sum_{i=1}^{10} (\ln(x_i))^2 = 9.3$.

Last opp fila her. Maks ei fil.

Det er høve til å laste opp følgjande filtypar: **.pdf** Maksimal filstorleik er **50 GB**.

Vel fil for opplasting

Maks poeng: 10

34 9B

Oppgåve 9

Vi bruker den lineære regresjonsmodellen

$$Y_i = x_i^3\beta + \epsilon_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

hvor $x_i > 0$ er ein kovariat, β er koeffisienten til kovariaten, og $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$ er uavhengige og normalfordelte stokastiske variablar med same forventningsverdi 0 og **kjente** varians $\sigma^2 = 2$.
Du skal bruka estimatoren $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^3 Y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^6}$ for β.

- Vis at $\hat{\beta}$ er forventningsrett og bestem variansen til $\hat{\beta}$.
- Skriv opp eit uttrykk for eit 95% prediksjonsintervall for ein ny verdi Y med kovariatverdi x. Du må grunngi val av uttrykk, men treng ikkje å utlede det.
- Finn talverdien til prediksjonsintervallet når $x = 2$, $n = 10$, $\sum_{i=1}^{10} x_i^3 y_i = 3$ og $\sum_{i=1}^{10} x_i^6 = 10$.

Last opp fila her. Maks ei fil.

Det er høve til å laste opp følgjande filtypar: **.pdf** Maksimal filstorleik er **50 GB**.

Vel fil for opplasting

Maks poeng: 10

35 **9C**

Oppgåve 9

Vi bruker den lineære regresjonsmodellen

$$Y_i = \mathrm{e}^{x_i}\beta + \epsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

hvor x_i er ein kovariat, β er koeffisienten til kovariaten, og $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ er uavhengige og normalfordelte stokastiske variablar med same forventningsverdi 0 og **kjente** varians $\sigma^2 = 2$.
Du skal bruka estimatoren $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{x_i} Y_i}{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{2x_i}}$ for β.

- Vis at $\hat{\beta}$ er forventningsrett og bestem variansen til $\hat{\beta}$.
- Skriv opp eit uttrykk for et 95% prediksjonsintervall for ein ny verdi Y med kovariatverdi x. Du må grunngi val av uttrykk, men treng ikkje å utlede det.
- Finn talverdien til prediksjonsintervallet når $x = 2$, $n = 10$, $\sum_{i=1}^{10} \mathrm{e}^{x_i} y_i = 5$ og $\sum_{i=1}^{10} \mathrm{e}^{2x_i} = 15$.

Last opp fila her. Maks ei fil.

Det er høve til å laste opp følgjande filtypar: **.pdf** Maksimal filstorleik er **50 GB**.

Vel fil for opplasting

Maks poeng: 10

36 **9D**

Oppgåve 9

Vi bruker den lineære regresjonsmodellen

$$Y_i = \sqrt{x_i}\beta + \epsilon_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

hvor $x_i > 0$ er ein kovariat, β er koeffisienten til kovariaten, og $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$ er uavhengige og normalfordelte stokastiske variablar med same forventningsverdi 0 og **kjente** varians $\sigma^2 = 2$. Du skal bruka estimatoren $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i} Y_i}{\sum_{i=1}^n x_i}$ for β.

- Vis at $\hat{\beta}$ er forventningsrett og bestem variansen til $\hat{\beta}$.
- Skriv opp eit uttrykk for et 95% prediksjonsintervall for ein ny verdi Y med kovariatverdi x. Du må grunngi val av uttrykk, men treng ikkje å utlede det.
- Finn talverdien til prediksjonsintervallet når $x = 2$, $n = 10$, $\sum_{i=1}^{10} \sqrt{x_i} y_i = 100$ og $\sum_{i=1}^{10} x_i = 50$.

Last opp fila her. Maks ei fil.

Det er høve til å laste opp følgjande filtypar: **.pdf** Maksimal filstorleik er **50 GB**.

Vel fil for opplasting

Maks poeng: 10