Bivariat normalfordeling

Eirik Mo

Våren 2007

Denne teksten er et lite tillegg til faget TMA4245, og er et konkret eksempel på en simultan sannsynlighetsfordeling, hvor vi også får koplet inn begreper som kovarians, korrelasjon, marginalfordeling og betinget fordeling. Dette skal altså betraktes som et eksempel til pensum vi gjennomgår i faget; ikke en utvidelse av pensum.

Den bivariate normalfordelingen

La oss se på følgende simultane sannsynlighetsfordeling for X og Y;

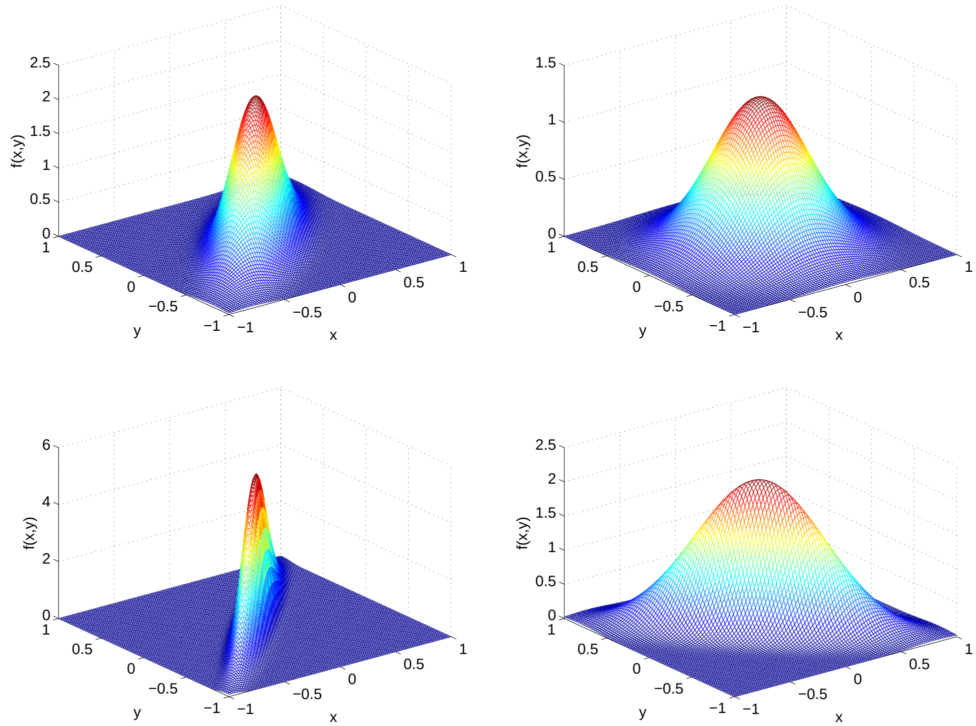
$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho_{XY}^2}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho_{XY}^2)}\left(\frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2} + \frac{(y-\mu_Y)^2}{\sigma_Y^2} - \frac{2\rho_{XY}(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}\right)\right). \tag{1}$$

Denne har fem parametre, $\mu_X, \sigma_X, \mu_Y, \sigma_Y$ og ρ_{XY}. For fornuftige verdier av disse parametrene, dvs $\sigma_X > 0$, $\sigma_Y > 0$ og $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$, er dette en sannsynlighetsfordeling. Det vil si; den er positiv for alle verdier av x og y, og den totale sannsynligheten er 1: $\int_\infty^\infty \int_\infty^\infty f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1$. Alle parametrene kjenner vi fra før som forventningsverdiene $\mu_X = \mathrm{E}(X)$ og $\mu_Y = \mathrm{E}(Y)$, standardavvikene $\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$ og $\sigma_Y = \sqrt{\mathrm{Var}(Y)}$, og korrelasjonen $\rho_{XY} = \mathrm{Cov}(X,Y)/(\sigma_X \cdot \sigma_Y)$, hvor $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mu_X\mu_Y$ er kovariansen mellom X og Y.

La oss videre anta at $\mu_X = \mu_Y = 0$, dvs at fordelingen er sentrert i origo. Dette forenkler regningen litt (og gjør at fordelingen får plass på én linje), men resultatene som kommer gjelder også i det generelle tilfellet. (Vi sentrerer strengt tatt med variabelskiftene $X_{\mathrm{ny}} = X_{\mathrm{gammel}} - \mu_X$ og $Y_{\mathrm{ny}} = Y_{\mathrm{gammel}} - \mu_Y$. Vi kan flytte fordelingen tilbake igjen ved å legge til μ_X og μ_Y på henholdsvis X og Y.) Videre skriver vi herfra ρ i stedet for ρ_{XY}.

Den simultane sannsynlighetsfordelingen fra likning (1) har altså nå tre parametre og ser slik ut:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x^2}{\sigma_X^2} + \frac{y^2}{\sigma_Y^2} - \frac{2\rho xy}{\sigma_X\sigma_Y}\right)\right). \tag{2}$$



I figurene over er $\sigma_X = \sigma_Y = 0.35$, mens ρ har verdiene 0.8 (øverst til venstre), 0.0 (øverst til høyre), 0.97 (nederst til venstre) og -0.8 (nederst til høyre).

Marginalfordeling, betinget fordeling og skjæring i den bivariate fordelingen

Du kan nå, som en matematisk øvelse, kontrollere at marginalfordelingene til X og Y blir de normalfordelingene vi ønsker, dvs

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left(-\frac{x^2}{\sigma_x^2}\right), \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y} \exp\left(-\frac{x^2}{\sigma_Y^2}\right).$$

Et tips er å begynne med å trekke ut det du ønsker å finne, dvs prøv å vis at

$$\begin{aligned} f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left(-\frac{x^2}{\sigma_x^2}\right) \cdot \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{\rho^2 x^2}{\sigma_X^2} + \frac{y^2}{\sigma_Y^2} - \frac{2\rho xy}{\sigma_X \sigma_Y}\right)\right). \end{aligned} \tag{3}$$

Hvis du deretter observerer at

$$\frac{\rho^2 x^2}{\sigma_X^2} + \frac{y^2}{\sigma_Y^2} - \frac{2\rho xy}{\sigma_X\sigma_Y} = \left(\frac{y}{\sigma_Y} - \frac{\rho x}{\sigma_X}\right)^2,$$

at alt på øverste linje i likning (3) kan tas utenfor integralet over y, og at det som står igjen på innsiden er en normalfordeling i y med en forventningsverdi som er en funksjon av x, er du egentlig framme. (Integralet over en sannsynlighetstetthet må være 1.) Det som står i likning (3), er egentlig rett og slett formelen

$$f(x, y) = f(x) \cdot f(y|x).$$

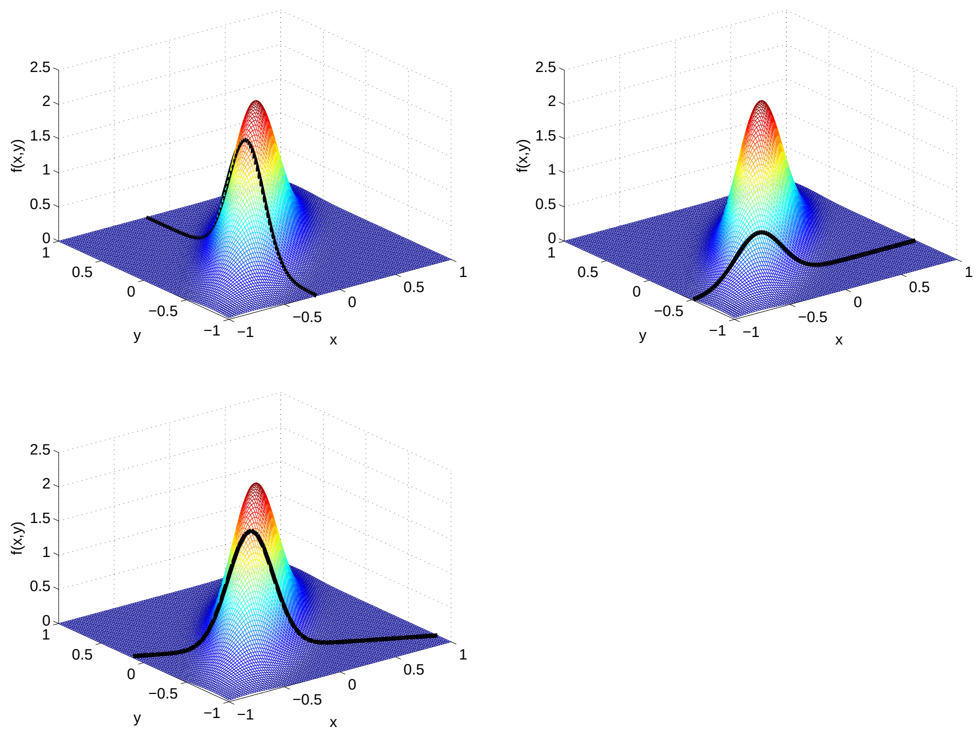
Vi har altså vist at ikke bare er marginalfordelingene normalfordelte, også de betingete sannsynlighetstetthetene $f(x|y)$ og $f(y|x)$ er normalfordelte. Det er for $f(y|x)$ samme utregning som i likning (3), hvor hele den øverste linjen divideres bort pga nevneren $f(x, y)/f(x)$. Altså har $f(y|x)$ formel

$$f(y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_Y^2(1-\rho^2)}\left(y - \frac{x\rho\sigma_Y}{\sigma_X}\right)^2\right),$$

dvs en normalfordeling med forventningsverdi og varians henholdsvis

$$\mathrm{E}(y|x) = \frac{\rho\sigma_Y x}{\sigma_X}, \qquad \mathrm{Var}(y|x) = \sigma_Y^2(1-\rho^2).$$

Vi skjærer her fordelingen parallellt med en av aksene. Hva med andre snitt?



Figurene viser en av de bivariate fordelingene ovenfor, skåret en gang parallellt med y-aksen ($x = $ konst), en gang parallellt med x-aksen ($y = $ konst) og en gang på skrå. Alle de svarte kurvene har altså form som normalfordelingen.

Faktisk vil alle rette snitt over $f(x, y)$ gi en normalfordeling (med unntak av konstantleddet). La oss som eksempel skjære fordelingen etter linja $x + y = c$. Det gir oss funksjonen

$$f(x, c-x) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x^2}{\sigma_X^2} + \frac{(c-x)^2}{\sigma_Y^2} - \frac{2\rho x(c-x)}{\sigma_X\sigma_Y}\right)\right),$$

som kan skrives på formen $K_1 \exp(-(x-K_2)^2/(2K_3))$ med tre konstanter. Selve utregningen av disse konstantene blir bare enda mer matematikk. Poenget er at også betingede fordelinger som $f(x|x+y=c)$ og liknende lineære betingelser også er normalfordelt.

Korrelasjon dannet av uavhengige variabler

La oss si at X og W er to uavhengige normalfordelte variabler:

$$X \sim n(x; \mu_X, \sigma_X),$$
$$W \sim n(w; \mu_W, \sigma_W).$$

Si videre at Y er en lineærkombinasjon av X og W; $Y = aX + bW$. Da kan vi bruke regnereglene fra kapittel 4 til å finne forventningsverdi og varians for Y:

$$\mu_Y = \mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(aX + bW) = a\mathrm{E}(X) + b\mathrm{E}(W) = a\mu_X + b\mu_W,$$
$$\sigma_Y^2 = \mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(aX + bW) \overset{\text{uavh}}{=} a^2\mathrm{Var}(X) + b^2\mathrm{Var}(W) = a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2.$$

Dermed kan vi sette opp fordelingen for Y, siden vi vet at lineærkombinasjoner av normalfordelte variabler er normalfordelt.

Videre kan vi beregne kovarians og korrelasjon mellom X og Y:

$$\begin{aligned}
\sigma_{XY} &= \mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mu_X\mu_Y = \mathrm{E}(aX^2 + bXW) - a\mu_X^2 - b\mu_X\mu_W \\
&= a(\mathrm{E}(X^2) - \mu_X^2) + b(\mathrm{E}(XW) - \mu_X\mu_W) \overset{\mathrm{Cov}(X,W)=0}{=} a(\mathrm{E}(X^2) - \mu_X^2) \\
&= a\mathrm{Var}(X) = a\sigma_X^2.
\end{aligned}$$
$$\rho = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y} = \frac{a\sigma_X}{\sigma_Y} = \frac{a\sigma_X^2}{\sigma_X\sqrt{a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_W^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (b^2\sigma_W^2)/(a^2\sigma_X^2)}}.$$

Vi husker fra tidligere at korrelasjonen er et tall i intervallet $[-1, 1]$, og det stemmer med uttrykket over. Hvis $\rho = 1$ betyr det at $Y = aX + c$ med $a > 0$, dvs at enten er $b = 0$, ellers så er W konstant dvs $\sigma_W = 0$, og betingelsen for $\rho = -1$ er tilsvarende, med $a < 0$.

Som en kuriositet kan vi til slutt nevne at X og Y kan være normalfordelte uten at vi kan skrive simultanfordelingen på formen i likning (1). Men da er sammenhengen mellom X og Y ikke-lineær, og ganske spesiell. Merk også at hvis X og Y er uavhengige og normalfordelte, så stemmer alltid likning (1) med $\rho = 0$, men det trenger ikke stemme selv om de er ukorrelerte.