# Anbefalt øving 2, oppgave 4

A og B kaster terning etter tur, første som får 6 vinner

Hendelser

$A_i$ = A vinner i kast i

$B_i$ = B ——"——

a) La $A$ være hendelsen at A vinner.

Da er

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \dots$$

$$= \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

Siden alle $A_i$ er disjunkte er (i følge 3. aksiom)

$$p_A = P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

$$P(A_1) = \frac{1}{6}$$

$$P(A_2) = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \frac{1}{6}$$

$$P(A_3) = \left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{5}{6}} \cdot \frac{1}{6}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{2(i-1)}$$

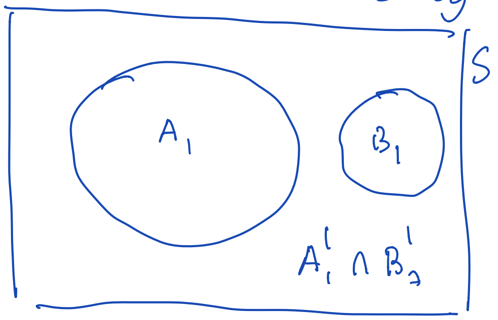
$$= \frac{1}{6} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{25}{36}\right)^i$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1 - \frac{25}{36}} = \frac{36}{6(36-25)} = \frac{6}{11}$$

$$p_B = P(B) = P(A') = 1 - P(A) = \frac{5}{11}$$

b) Vis at $p_A, p_B$ oppfyller $p_A = \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 p_A$ og $p_B = \frac{5}{6} p_A$.

Hendelsene $A_1, B_1, (A_1 \cup B_1)' \underset{\text{de Morgan}}{=} A_1' \cap B_1'$ er parvis disjunkte med union $S$ og dermed en partisjon av $S$:



I følge lov om totalsannsynlighet (LTS) er derfor

$$p_A = P(A) = P(A \mid A_1) P(A_1) + P(A \mid B_1) P(B_1) + \underbrace{P(A \mid A_1' \cap B_1')}_{\overset{(*)}{=} p_A} P(A_1' \cap B_1')$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + p_A \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2$$

(*) følger fordi vi er i samme situasjon som ved spillets begynnelse hvis hverken A eller B vinner i første kast – prosessen er hukommelsesløs.

Løst for $p_A$ får vi

$$\left(1 - \frac{25}{36}\right) p_A = \frac{1}{6} \Rightarrow p_A = \frac{6}{11}$$

Tilsvarende, om vi betrakter partisjonen $A_1$ og $A_1'$ er i følge LTS,

$$p_B = P(B) = P(B \mid A_1) P(A_1) + P(B \mid A_1') P(A_1')$$

$$= 0 \cdot \frac{1}{6} + p_A \cdot \frac{5}{6}$$

siden B er samme situasjon som A ved spillets begynnelse hvis A ikke vinner i første kast.

Dermed er

$$p_B = \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{11} = \frac{5}{11}$$

n spillere kaster terning etter tur. Samme resonnement

Notasjon: $A_i$ : Spiller i vinner

$A_{ji}$ : Spiller i vinner i runde j

$$p_1 = P(A_1) = P(A_1 \mid A_{11}) P(A_{11}) + P(A_1 \mid A_{12} \cup \dots \cup A_{1n}) P(A_{12} \cup \dots \cup A_{1n}) + P(A_1 \mid A_{11}' \cap A_{12}' \cap \dots \cap A_{1n}') P(A_{11}' \cap \dots \cap A_{1n}')$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{6} + P_1 \left(\frac{5}{6}\right)^n \Rightarrow P_1 = \frac{1}{6\left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)}$$

$$p_i = P(\text{Spiller } i \text{ vinner})$$
$$= P(A_i)$$

LTS

$$= \underbrace{P\left(A_i \,\middle|\, \bigcup_{j=1}^{i-1} A_{1j}\right)}_{=0} P\left(\bigcup_{j=1}^{i-1} A_{1j}\right)$$

$$+ P\left(A_i \,\middle|\, \bigcap_{j=1}^{i-1} A_{1j}'\right) P\left(\bigcap_{j=1}^{i-1} A_{1j}'\right)$$

$$= P_1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1}$$

$$= \frac{(5/6)^{i-1}}{6\left(1 - (5/6)^n\right)}$$

Når $n \to \infty$ går $p_1 \to \frac{1}{6}$ og $p_i \to \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{i-1}$

Tolkning: Hver spiller har kun "én sjanse" i grensen.

# Eksamen juni, 2010, oppgave 1

Ressesiv genvariant a med frekvens $P(a) = 0.01$, $P(A) = 0.99$ i populasjonen.

Disponeren for sykdom S slik at

$$P(S \mid aa) = 0.6$$
$$P(S \mid Aa) = 0.02$$
$$P(S \mid AA) = 0.01$$

a) Sans. for sykdom til tilfeldig valgt individ?

Antar Hardy–Weinberg, d.v.s uavhengighet mellom maternalt og paternalt nedarvet genvariant.

Da er

$$P(aa) = P(a_m \cap a_p) = P(a_m)P(a_p) = 0.01^2 = 0.0001$$
$$P(Aa) = P[(A_m \cap a_p) \cup (a_m \cap A_p)] = 2\; 0.01 \cdot 0.99 = 0.0198$$
$$P(AA) = \ldots = 0.9801$$

og

$$P(S) = P(S \mid AA)P(AA) + P(S \mid Aa)P(Aa) + P(S \mid aa)P(aa)$$

$$= \ldots = 0.0103$$

b) Finn $P(AA \mid S)$, $P(Aa \mid S)$, $P(aa \mid S)$. Bayes teorem

$$P(aa \mid S) = \frac{P(S \mid aa)P(aa)}{P(S)}$$

normaliserings konstant

$$= \frac{0.6 \cdot 0.0001}{0.0103} = 0.00584$$

$$P(Aa \mid S) = 0.0386$$
$$P(AA \mid S) = 0.956$$

$$\underbrace{P(A_i \mid B)}_{\text{A posteriori sannsynlighet}} \propto \underbrace{P(B \mid A_i)}_{\text{Sanns. for observerte data under ulike alternative hypoteser}} \underbrace{P(A_i)}_{\text{A priori sannsynligheter}}$$

# Diskrete vs. kontinuerlige stok. variable

Ofte: Hvis $X$ kun tar heltallige verdier $0, 1, 2, \ldots$ er $X$ diskret fordelt.

Def.: $X$ har diskret fordelt hvis mengden $X$ tar verdier fra er <u>tellbar</u>

Eks.: Anta at $X$ og $Y$ er uavhengige med punktsannsynlighetsfunksjoner

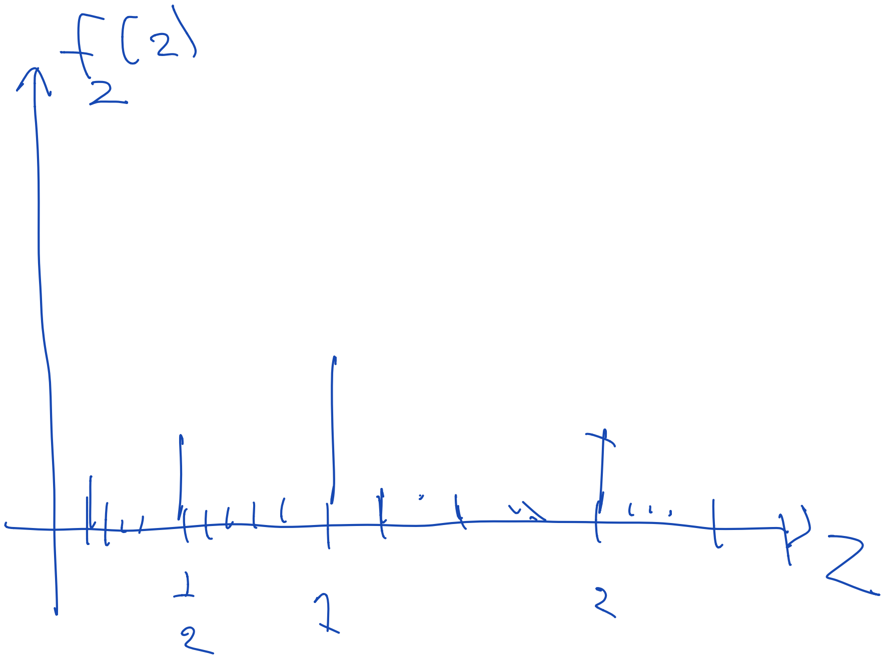
$$f(x) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$$

for $x = 1, 2, 3, \ldots$. La $Z = X/Y$.
$Z$ kan da ta verdier fra mengden av alle positive rasjonale tall

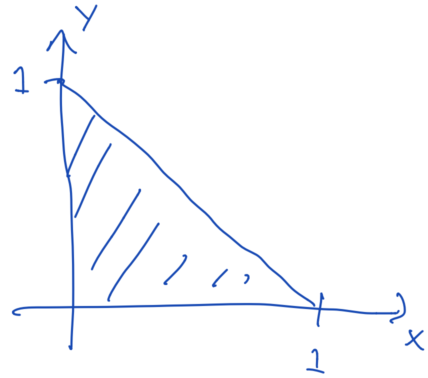
$$\mathbb{Q}^+ = \left\{ \begin{array}{llll} 1/1, & 1/2, & 1/3, & 1/4, \ldots \\ 2/1, & & 2/3, & \cdot\,, \\ 3/1, & 3/2, & & 3/4, \\ 4, & & 4/3, & \\ \vdots & & & \end{array} \right\}$$

$\mathbb{Q}^+$ er tellbar og dermed diskret fordelt.

Mengden av reelle ~~tall~~ tall $\mathbb{R}$ ikke tellbar.



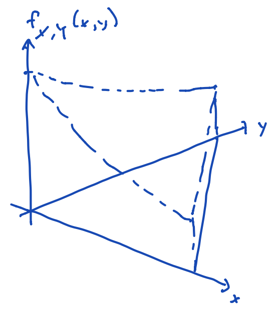
## Simultanfordeling, uavhengighet




Anta at $X$ og $Y$ har simultantetthet

$$f_{X,Y}(x,y) = k e^{-x-y} \propto e^{-x} \cdot e^{-y}$$

for $x > 0$, $y > 0$, $x + y < 1$ og $0$ ellers.




Finn $k$: Må ha $\quad y < 1 - x$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$$

Vi får

$$k\int_0^1\int_0^{1-x} e^{-x-y}\,dy\,dx = k\int_0^1 \left(e^{-x}\left[-e^{-y}\right]_0^{1-x}\right)dx$$

$$= k\int_0^1 e^{-x}\left(1 - e^{x-1}\right)dx$$

$$= k\int_0^1 e^{-x} - e^{-1}\,dx$$

$$= k\left[-e^{-x} - x e^{-1}\right]_0^1$$

$$= k\left[1 - e^{-1} - e^{-1}\right]$$

$$= k\left[1 - 2e^{-1}\right] = 1 \implies k = \frac{1}{1 - 2e^{-1}}$$

X har marginal fordeling

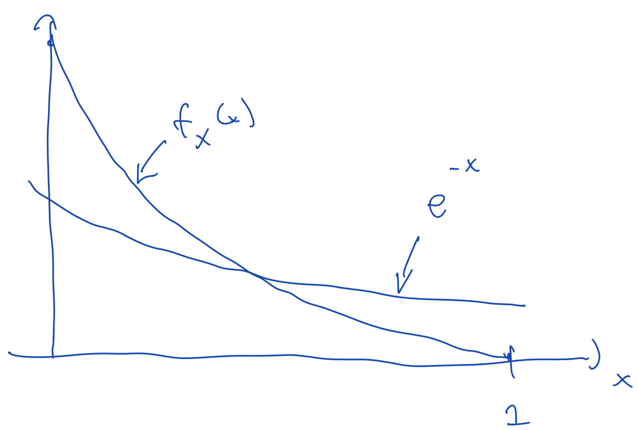
$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$$

$$= k\int_0^{1-x} e^{-x-y}\,dy$$

$$= ke^{-x}\left[-e^{-y}\right]_0^{1-x}$$

$$= ke^{-x}\left(1 - e^{x-1}\right)$$

$$= k\left(e^{-x} - e^{-1}\right) = \frac{e^{-x} - e^{-1}}{1-2e^{-1}}$$




Symmetri $\Rightarrow$ $f_Y(y)$ samme form.

Siden $f_X(x)f_Y(y) \neq f_{X,Y}(x,y)$

er X og Y avhengige stokastiske variable