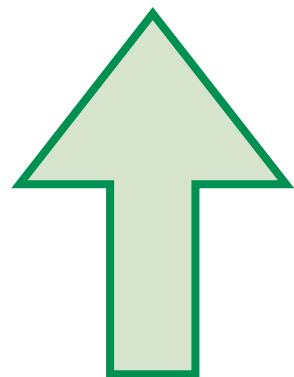
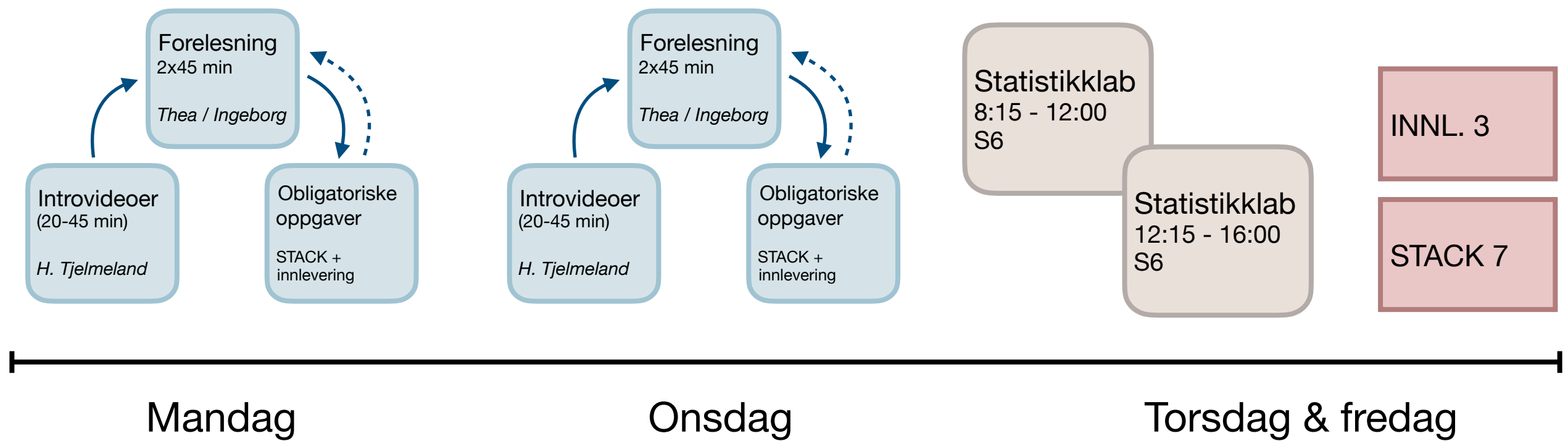


TMA4245 Statistikk

Uke 8 - mandag



Uke 8 (mandag 19. feb - fredag 23. feb)



Introvideoer

Momenter og momentgenererende funksjoner

TMA4240/TMA4245 Statistikk

Håkon Tjelmeland
Institutt for matematiske fag
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

Bruke momentgenererende funksjoner til å bevise egenskaper til fordelinger

TMA4240/TMA4245 Statistikk
Håkon Tjelmeland
Institutt for matematiske fag
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

Oppgaver

STACK 7: Opppg. 1-3
INNL. 3: Opppg. 2b

2 Noen kontinuerlige sannsynlighetsfordelinger

Normalfordeling (Gaussfordeling)

$$f(x) = n(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x - \mu)^2}{\sigma^2}\right), \quad -\infty < x < \infty.$$

$$E(X) = \mu, \quad \text{Var}(X) = \sigma^2, \quad M_X(t) = e^{\mu t + \sigma^2 t^2 / 2}.$$

$$F(x) = P(X \leq x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right).$$

Eksponentialfordeling

$$f(x) = \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta}, \quad x \geq 0.$$

$$E(X) = \beta, \quad \text{Var}(X) = \beta^2, \quad M_X(t) = \frac{1}{1 - \beta t} \text{ for } t < \frac{1}{\beta}.$$

Kommentar: Ofte vanlig å bruke parameteren $\lambda = 1/\beta$.

Opppg. 1a: Regne ut / finne MGF-er

Definisjon (Momentgenererende funksjon)

Momentgenererende funksjon til en stokastisk variabel X er

$$M_X(t) = E[e^{tX}].$$

Anta at X er diskret fordelt med punktsannsynlighet

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{for } x = 0 \\ \frac{1}{5} & \text{for } x = 1 \\ \frac{3}{10} & \text{for } x = 2 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

(a) Finn den momentgenererende funksjonen til X , $M(t) = E(e^{tX})$.

Hva skal vi bruke disse momentgenererende funksjonene til?

1. Generere momenter

2. Vise / utlede sammenheng mellom fordelinger

NB: Det er ofte enklere å jobbe med $M_X(t)$ enn med $f_X(x)$

Frampek: Laplace-transformasjoner i matte 4

Opppg. 1b: Generere momenter

Definisjon (r -te ordens moment)

La X være en stokastisk variabel. Da er r -te ordens moment til X gitt som

$$\mu_r = E[X^r]$$

for $r \in \{1, 2, \dots\}$.

★ Merk:

- $\mu_1 = E[X] = \mu$
- siden $\text{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2$ har vi at $\mu_2 = E[X^2] = \sigma^2 + \mu_1^2$

abs! +, ikke -

Definisjon (Momentgenererende funksjon)

Momentgenererende funksjon til en stokastisk variabel X er

$$M_X(t) = E[e^{tX}].$$

Teorem

La X være en stokastisk variabel med momentgenererende funksjon $M_X(t)$. For $r \in \{1, 2, \dots\}$ har vi da at

$$M_X^{(r)}(0) = E[X^r] = \mu_r$$

Opppg. 2: Generere momenter i eksponentialfordelingen

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \text{ for } x \geq 0 \qquad M_X(t) = \frac{1}{1 - t/\lambda}, \text{ for } t < \lambda$$

a) Finn et uttrykk for $E(X)$

b) Finn et uttrykk for $\text{Var}(X)$, ved å bruke $\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$

Opppg. 3: Vise / utlede sammenhenger

Teorem

La X og Y være to stokastiske variabler med momentgenererende funksjoner henholdsvis $M_X(t)$ og $M_Y(t)$. Dersom

$$M_X(t) = M_Y(t)$$

for alle t er også fordelingene til X og Y identiske.

★ Ofte enklere å vise at $M_X(t)$ og $M_Y(t)$ er like enn å vise at $f_X(x)$ og $f_Y(y)$ er like

Teorem

La $X_1, X_2, \dots, X_n$ være uavhengige og $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i)$. La $Y = \sum_{i=1}^n X_i$. Da er Y poissonfordelt med parameter $\sum_{i=1}^n \lambda_i$.

Poissonfordeling

$$f(x) = p(x; \mu) = \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

$$E(X) = \mu, \quad \text{Var}(X) = \mu, \quad M_X(t) = e^{\mu(e^t - 1)}.$$

Opppg. 4: Vise / utlede sammenhenger

Teorem

La $X_1, X_2, \dots, X_n$ være uavhengige og eksponensialfordelt med samme parameter λ . La $Y = \sum_{i=1}^n X_i$. Da er Y gammafordelt med parametre $\alpha = n$ og $\beta = \frac{1}{\lambda}$.

Eksponentialfordeling

$$f(x) = \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta}, \quad x \geq 0.$$

$$E(X) = \beta, \quad \text{Var}(X) = \beta^2, \quad M_X(t) = \frac{1}{1 - \beta t} \text{ for } t < \frac{1}{\beta}.$$

Kommentar: Ofte vanlig å bruke parameteren $\lambda = 1/\beta$.

Gammafordeling

$$f(x) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, \quad x \geq 0.$$

$$E(X) = \alpha\beta, \quad \text{Var}(X) = \alpha\beta^2, \quad M_X(t) = \left(\frac{1}{1 - \beta t} \right)^\alpha \text{ for } t < \frac{1}{\beta}.$$

Opppg. 5: Normalfordelingen

Bolter fra en bestemt produksjonslinje har en diameter som vi kan anta er normalfordelt med forventning 9.85 mm og standardavvik 0.05 mm.

Mutteren som skal skrus på bolten har en diameter som vi kan anta er normalfordelt med forventning 10.0 mm og standardavvik 0.05 mm.

Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig valgt mutter kan skrus på en tilfeldig valgt bolt?

- a) Hva skal vi egentlig regne ut? Skriv opp matematisk uttrykk med $P(\text{"noe"})$ og to passende stokastiske variabler.
- b) Hvilken fordeling har $X-Y$? Finn $M_{X-Y}(t)$

Normalfordeling (Gaussfordeling)

$$f(x) = n(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x - \mu)^2}{\sigma^2}\right), \quad -\infty < x < \infty.$$

$$E(X) = \mu, \quad \text{Var}(X) = \sigma^2, \quad M_X(t) = e^{\mu t + \sigma^2 t^2 / 2}.$$

$$F(x) = P(X \leq x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right).$$

Opppg. 5: Normalfordelingen

Bolter fra en bestemt produksjonslinje har en diameter som vi kan anta er normalfordelt med forventning 9.85 mm og standardavvik 0.05 mm.

Mutteren som skal skrus på bolten har en diameter som vi kan anta er normalfordelt med forventning 10.0 mm og standardavvik 0.05 mm.

Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig valgt mutter kan skrus på en tilfeldig valgt bolt?

- a) Hva skal vi egentlig regne ut? Skriv opp matematisk uttrykk med $P(\text{"noe"})$ og to passende stokastiske variabler.
- b) Hvilken fordeling har $X-Y$? Finn $M_{X-Y}(t)$
- c) Hva blir $P(X-Y \leq 0)$?