EKS 1 :

Bernoulli forsøksrekke

- n uavhengige forsøk EKS: $n = 10$
- $p = P(\text{suksess})$ i hvert forsøk p er ukjent

X : antall suksesser i n forsøk

$X \sim \text{Binomisk}(n, p)$

hva tror du at p er ?

⟶ observerer $x = 5$ suksesser i 10 forsøk

Svar $\hat{p} = 5/10 = 0.5$ ← er dette en god måte å estimere p på ?

estimat (tall)

Rep: Estimator

Her $\hat{p} = \dfrac{X}{n}$ ← antall suksesser, ← antall forsøk

$\hat{p}$ ↑ estimator for p → gir estimat når vi observerer X.

Svar: $E(\hat{p}) = \dfrac{E(X)}{n} = \dfrac{np}{n} = p$ Forventningsrett

$Var(\hat{p}) = \dfrac{Var(X)}{n^2} = \dfrac{np(1-p)}{n^2} = \dfrac{p(1-p)}{n}$ Variansen i estimatoren blir lavere når vi har flere observasjoner

$X \sim \text{binom}(n, p)$ ← ukjent

observasjon : $x = 5$

ukjent parameter

fordelingen til X som genererte x.

Rimelighetsfunksjon : $L(p; x) = f(x; p)$

observasjon

her $L(p; 5) = \underbrace{\binom{10}{5} p^5 (1-p)^{10-5}}$

hvilken verdi av p maksimerer sannsynligheten for $x = 5$?

$L(p; 5)$ er størst ved $p = 0.5$

Generelt : $X \sim \text{binom}(n, p) \rightarrow$ observasjon x

$L(p; x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$ ← hvilken p maksimerer dette uttrykket ?

Bruk :

$$l(p; x) = \ln(L(p; x)) = \ln\binom{n}{x} + x \ln(p) + (n-x)\ln(1-p)$$

Svar : $\frac{d}{dp} l(p; x) = \frac{x}{p} + \frac{n-x}{1-p}(-1) = 0$

$$\frac{x}{p} = \frac{n-x}{1-p}$$

$$x - xp = (n-x)p$$

$$x = (n-x)p + xp = np$$

$$\Rightarrow p = x/n$$

$$\boxed{\text{SME : } \hat{p} = \frac{X}{n}}$$

EKS 2: μ og σ^2 i normalfordelingen

$N(\mu, \sigma^2)$-populasjon $\longrightarrow$ tilfeldig utvalg

$X_1, X_2, \ldots, X_n$

uavhengige, identisk fordelte

$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

ser for oss at vi skal trekke n personer eller skal lage n muttere

Eks: høyde til tilfeldig valgt nordmann

eller

diameter til en mutter som produseres med en maskin

$\downarrow$

observasjoner / realisasjoner

$x_1, x_2, \ldots, x_n$

dette er det eneste vi faktisk ser, men hvordan ser slike utvalg ut?

Mål: Bruke $x_1, x_2, \ldots, x_n$ til å estimere μ og σ^2

Mål: estimatorer $\hat{\mu}(X_1, \dots, X_n)$ og $\hat{\sigma}^2(X_1, \dots, X_n)$

som gir oss "gode" (tall)estimat

$\hat{\mu}(x_1, \dots, x_n)$ og $\hat{\sigma}^2(x_1, \dots, x_n)$

$$L(\mu, \sigma^2; x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n; \mu, \sigma^2)$$

simultanfordeling $X_1, \dots, X_n$

$$\overset{\text{uavh.}}{=} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$l(\mu, \sigma^2; x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right) - \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

$$= -\frac{n}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i-\mu)^2$$

Løs : $\frac{\partial l}{\partial \mu} = 0$ og $\frac{\partial l}{\partial \sigma^2} = 0$

$$\frac{\partial l}{\partial \mu} = -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} 2(x_i-\mu)(-1) = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu\right) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = n\mu \quad \rightarrow \quad \mu = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \bar{x}$$

Uansett hva σ^2 er !

$$\frac{\partial l}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{\cancel{2}} \frac{1}{\cancel{2\pi}\sigma^2} \cdot \cancel{2\pi} + \frac{1}{\cancel{2}(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = 0$$

$$-\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = 0 \quad \Big| \cdot \sigma^4$$

$$n\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum(x_i-\mu)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

estimat for μ påvirker også estimat for σ^2

ESTIMATORER for μ og σ^2

$$\hat{\mu} = \hat{\mu}(X_1, X_2, \dots, X_n) = \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{\sigma}^2(X_1, X_2, \dots, X_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

$$E(\hat{\mu}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}\cdot n\mu = \mu$$

$$E(\hat{\sigma}^2) = \frac{1}{n} E \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \qquad \Big| \cdot \frac{\sigma^2}{\sigma^2}$$

$$= \frac{\sigma^2}{n} E \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma}\right)^2}_{\chi^2_{n-1}}$$

$$= \frac{\sigma^2}{n}\cdot(n-1)$$ ikke forventningsrett

$\rightarrow \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 \qquad \underline{E(S^2) = \sigma^2}$

NB: $S = \sqrt{S^2}$ brches som estimator for σ.