

EKS 1:

Bernoulli forsøksrekke

- n uavhengige forsøk

EKS: $n=10$

- $p = P(\text{suksess})$ i hvert forsøk

p er ukjent

X : antall suksesser i n forsøk

$X \sim \text{Binomisk}(n, p)$

hva tror du at p er?

Observerer $X = 5$ suksesser i 10 forsøk

Svar $\hat{p} = 5/10 = 0.5$

↑
estimat (tall)

← er dette en god måte å estimere p på?

Rep: Estimator

$$\text{Her } \hat{p} = \frac{\bar{X}}{n}$$

← antall
suksesser

← antall forsøk

↑

estimator for $p \rightarrow$ gir estimat når vi observerer $\bar{X}$.

$$\text{Svar: } E(\hat{p}) = \frac{E(X)}{n} = \frac{np}{n} = p$$

Forventningsrett

$$\text{Var}(\hat{p}) = \frac{\text{Var}(X)}{n^2} = \frac{np(1-p)}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n}$$

Variansen i
estimatoren blir
lavere når vi
har flere
observasjoner

$X \sim \text{binom}(n, p)$ ← uljøent
observasjon: $x = 5$

Rimelighetsfunksjon: $L(p; x) = f(x; p)$

her $L(p; 5) = \binom{10}{5} p^5 (1-p)^{10-5}$

↑
observasjon

← uljøent parameter

← fordelingen til X som genererte x .

hvilken verdi av p
maksimerer sannsynligheten
for $x = 5$?

$L(p; 5)$ er størst ved $p = 0.5$

Generelt: $X \sim \text{binom}(n, p) \rightarrow$ observasjon x

$$L(p; x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

← hvilken p maksimerer dette uttrykket?

Bruk:

$$\ln L(p; x) = \ln \left(\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \right) = \ln \binom{n}{x} + x \ln(p) + (n-x) \ln(1-p)$$

$$\text{Svar : } \frac{d}{dp} \ln(p; x) = \frac{x}{p} + \frac{n-x}{1-p} (-1) = 0$$

$$\frac{x}{p} = \frac{n-x}{1-p}$$

$$x - xp = (n-x)p$$

$$x = (n-x)p + xp = np$$

$$\Rightarrow p = x/n$$

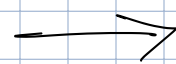
$$\text{SME : } \hat{p} = \frac{x}{n}$$

EKS 2: μ og σ^2 i normalfordelingen

$N(\mu, \sigma^2)$ -populasjon

Eks: høyde til tilfeldig
valgt nordmann
eller

diameter til
en mutter som
produseres med
en maskin

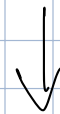


tilfeldig utvalg

$X_1, X_2, \dots, X_n$

uavhengige, identisk fordelte

$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$



observasjoner / realisasjoner

$x_1, x_2, \dots, x_n$

ser for oss
at vi skal
trekke n personer
eller skal lage
 n muttere

Mål: Bruke $x_1, x_2, \dots, x_n$ til
å estimere μ og σ^2

← dette
er det eneste
vi faktisk ser,
men hvordan ser
slike utvalg ut?

Mål: estimatorene $\hat{\mu}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ og $\hat{\sigma}^2(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$
som gir oss "gode" (tall) estimat
 $\hat{\mu}(x_1, \dots, x_n)$ og $\hat{\sigma}^2(x_1, \dots, x_n)$

$$L(\mu, \sigma^2; x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n; \mu, \sigma^2) \quad \begin{array}{l} \text{simultan-} \\ \text{fordeling} \\ x_1, \dots, x_n \end{array}$$

uavh. $\Rightarrow$

$$= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\begin{aligned} l(\mu, \sigma^2; x_1, \dots, x_n) &= \sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right) - \frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2} \\ &= -\frac{n}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \end{aligned}$$

$$L\&S : \frac{\partial L}{\partial \mu} = 0 \quad \text{og} \quad \frac{\partial L}{\partial \sigma^2} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n 2(x_i - \mu)(-1) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)$$

$$= \frac{1}{\sigma^2} \left(\sum_{i=1}^n x_i - n\mu \right) = 0$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = n\mu \quad \rightarrow \quad \mu = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \bar{x} \quad \text{Uansett hva } \sigma^2 \text{ er!}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2} \frac{1}{2\pi\sigma^2} \cdot 2\pi + \frac{1}{2(\sigma^2)^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = 0$$

$$-\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma^4} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = 0 \quad | \cdot \sigma^4$$

$$n\sigma^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

estimat for μ
påvirker også
estimat for σ^2

ESTIMATORER for μ og σ^2

$$\hat{\mu} = \hat{\mu}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{\sigma}^2(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

$$E(\hat{\mu}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(x_i) = \frac{1}{n} \cdot n\mu = \mu$$

$$E(\hat{\sigma}^2) = \frac{1}{n} E \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad | \cdot \frac{\sigma^2}{\sigma^2}$$

$$= \frac{\sigma^2}{n} E \underbrace{\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} \right)^2}_{\chi^2_{n-1}}$$

$$= \frac{\sigma^2}{n} \cdot (n-1) \quad \text{ikke forventningsrett}$$

$$\rightarrow S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad \underline{E(S^2) = \sigma^2}$$

NB: $S = \sqrt{S^2}$ bruges som estimator for σ .