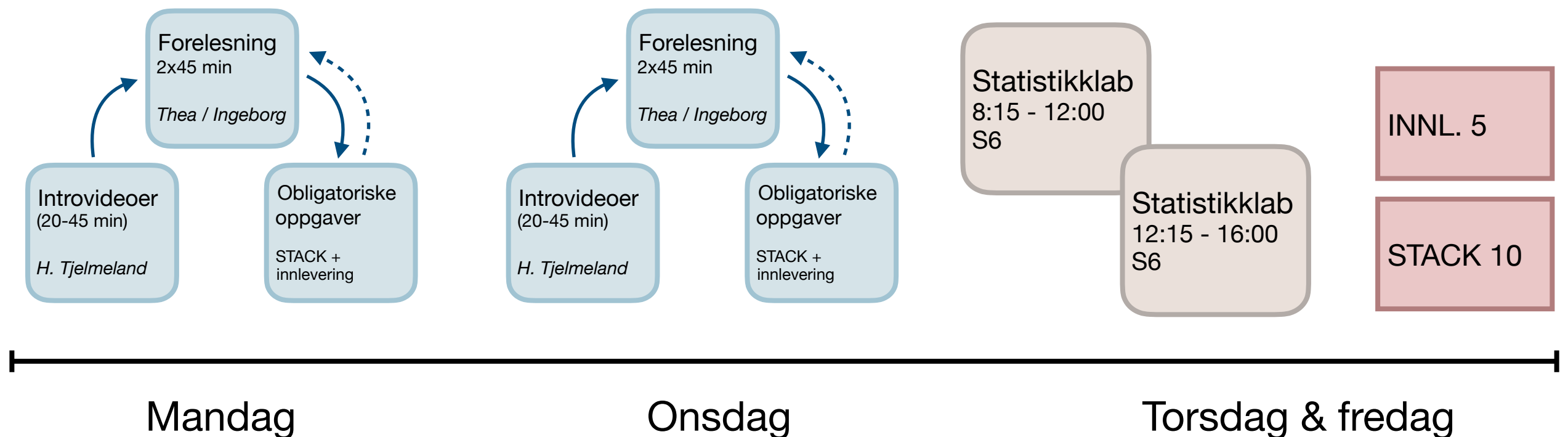
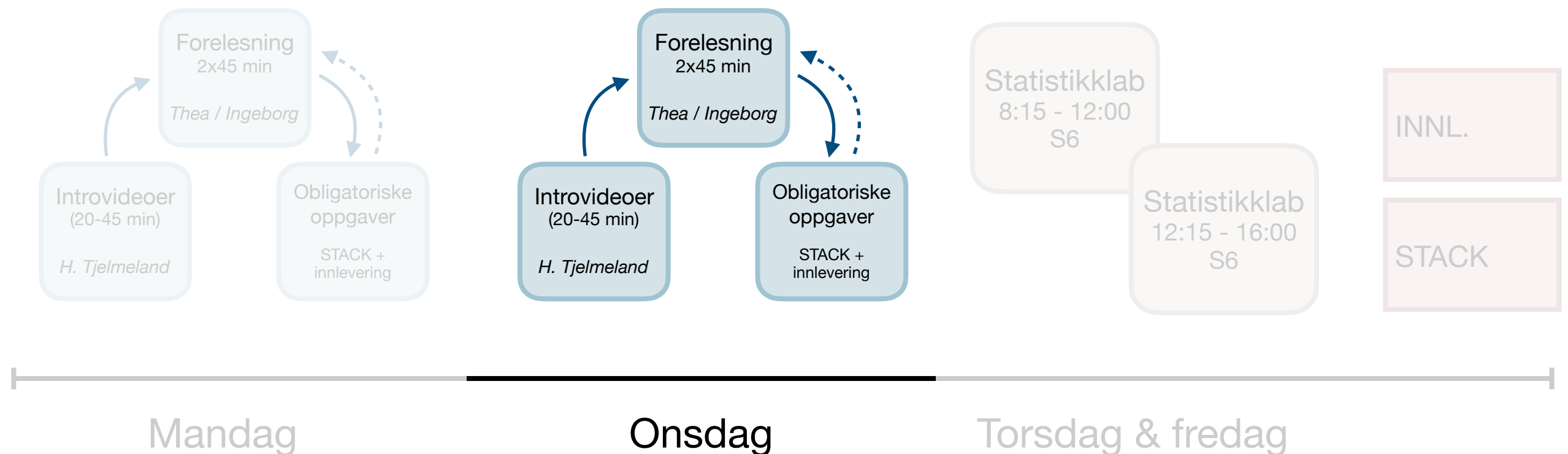


TMA4245 Statistikk

Uke 11 - mandag



Uke 11 (mandag 11. mars - fredag 15. mars)



Introvideoer

Valg av testobservator i en del hypotesetestingssituasjoner

TMA4240/TMA4245 Statistikk
Håkon Tjelmeland
Institutt for matematiske fag
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

Sammenheng mellom konfidensintervall og tosidig hypotesetest

TMA4240/TMA4245 Statistikk
Håkon Tjelmeland
Institutt for matematiske fag
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

Oppgaver

STACK 10: Oppg. 3, 4
INNLL. 5: Oppg. 2

Forts: Oppgave 2

En produsent påstår at et produkt har minst 95% pålitelighet ved levetid 5 år. Da utløper garantiperioden. En forhandler som har solgt 185 av disse produktene ble likevel kontaktet 18 ganger av kunder før garantiperioden var slutt om at produktet var ødelagt. Forhandleren er derfor interessert i å kritisk vurdere sannsynligheten p for at produktet fungerer mindre enn 5 år.

$$H_0: p \leq 0.05 \quad H_1: p > 0.05$$

$$\text{Testobservator: } X \sim \text{Binom}(n = 185, p)$$

$$\text{Signifikansnivå } \alpha = 0.1.$$

Strategi 1: Bruk kritisk verdi k

Strategi 2: Bruk p-verdi

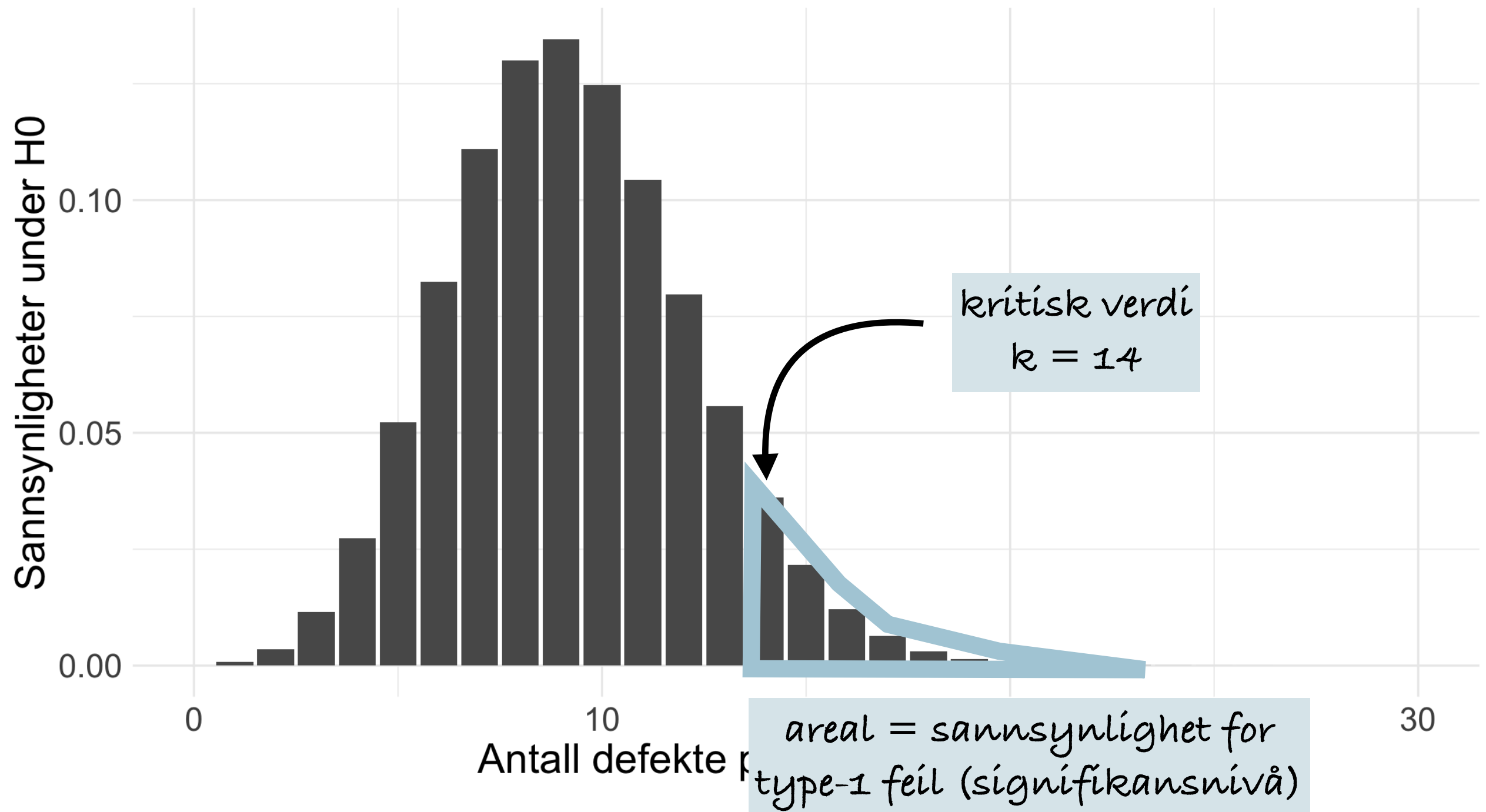
Forts: Oppgave 2

Strategi 1: Bruk kritisk verdi k

$$H_0: p \leq 0.05 \quad H_1: p > 0.05$$

1. Hvilke observasjoner av X peker mot at H_1 er sann?
2. Hvilke observasjoner av X peker mot at H_1 er sann *og samtidig* oppfyller $P(\text{type-1 feil}) \leq 0.1$?

Oppgave 2



Forts: Oppgave 2

Strategi 1: Bruk kritisk verdi k

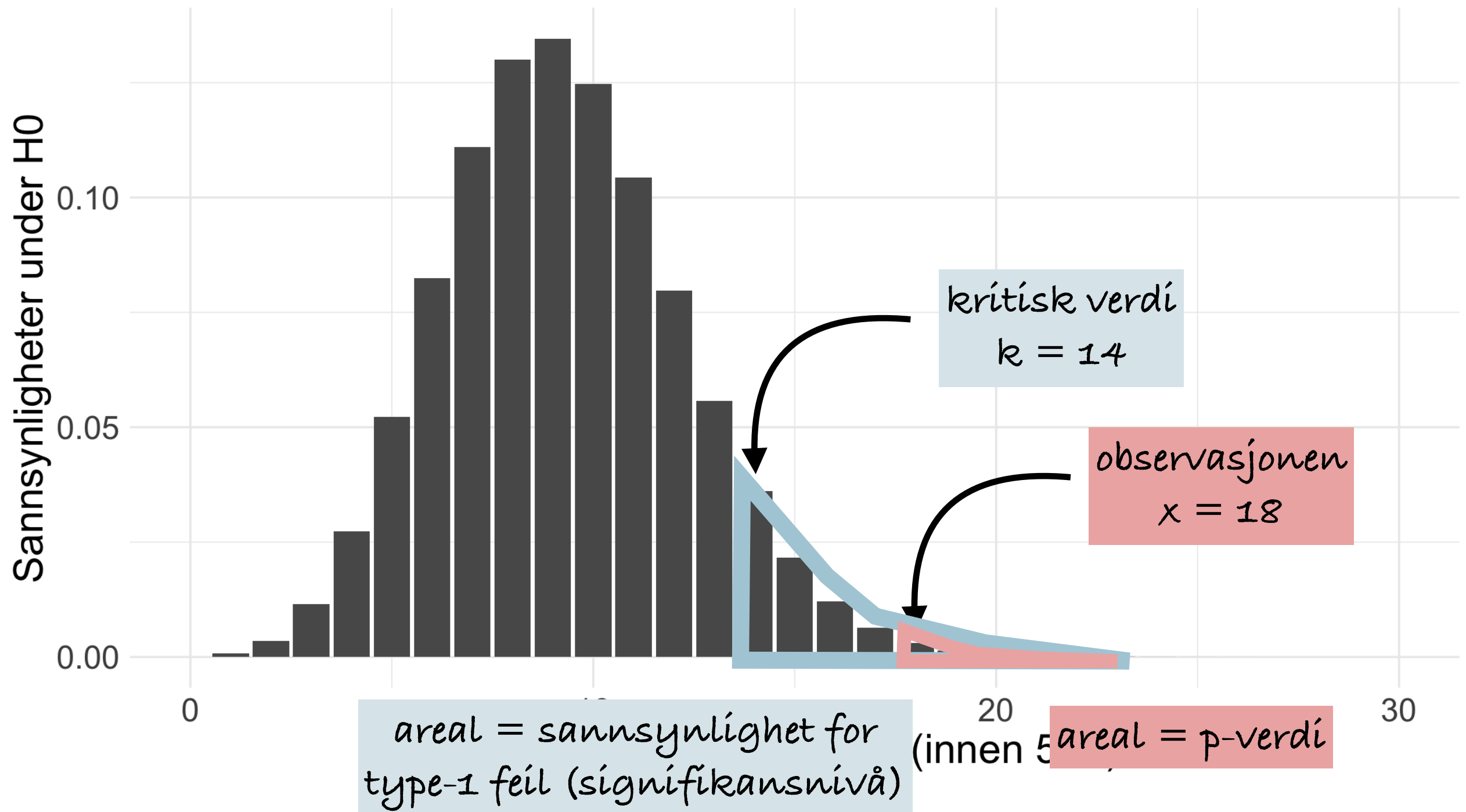
$$H_0: p \leq 0.05 \quad H_1: p > 0.05$$

1. Hvilke observasjoner av X peker mot at H_1 er sann?
2. Hvilke observasjoner av X peker mot at H_1 er sann *og samtidig* oppfyller $P(\text{type-1 feil}) \leq 0.1$?

Strategi 2: Bruk p-verdi

1. Hva er $P(X \geq 18)$ når H_0 er sann ($p = 0.05$)?

Oppgave 2

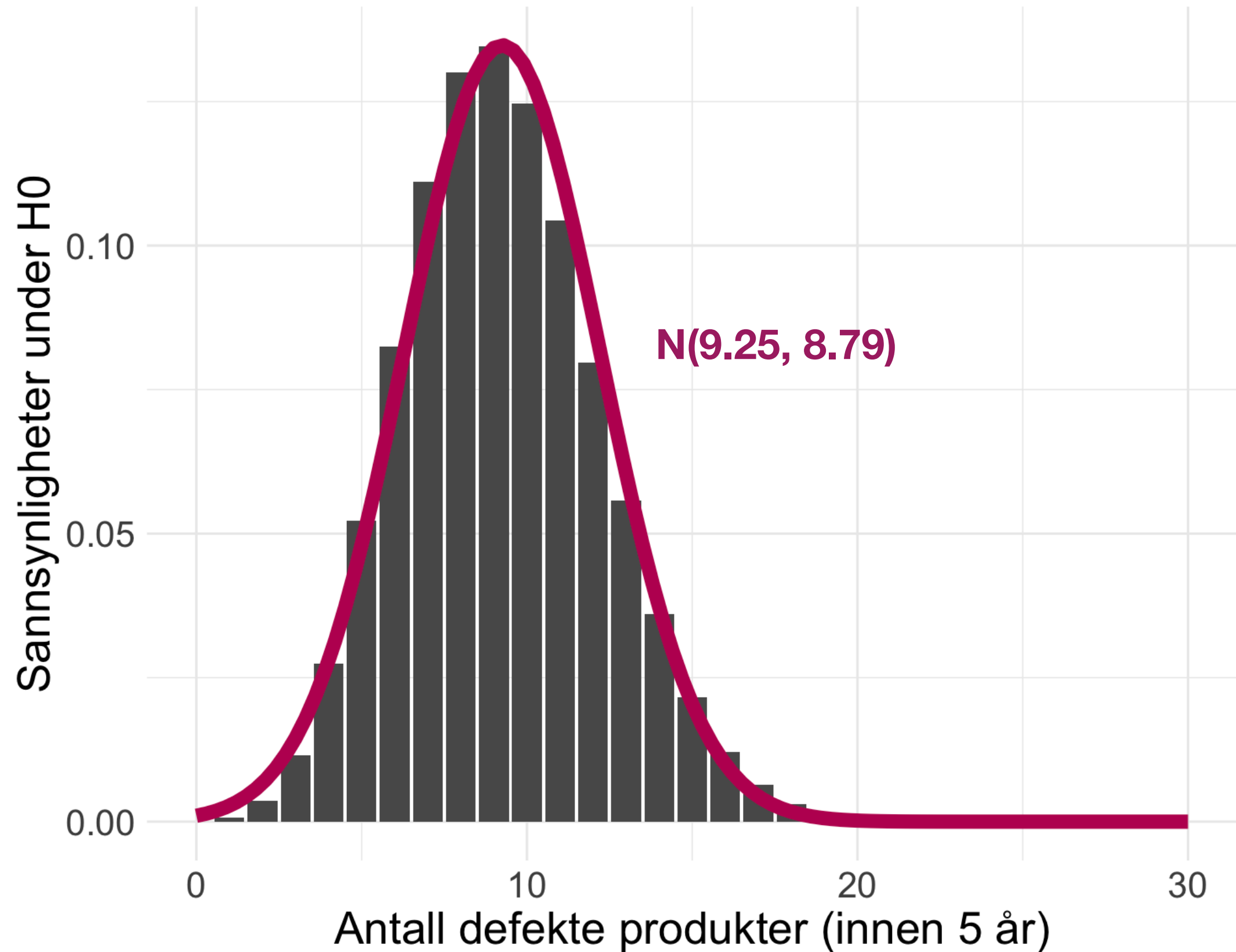


Oppgave 2 +

En produsent påstår at et produkt har minst 95% pålitelighet ved levetid 5 år. Da utløper garantiperioden. En forhandler som har solgt 185 av disse produktene ble likevel kontaktet 18 ganger av kunder før garantiperioden var slutt om at produktet var ødelagt. Forhandleren er derfor interessert i å kritisk vurdere sannsynligheten p for at produktet fungerer i mindre enn 5 år.

- a) Med samme hypoteser som i forrige oppgave, velg en testobservator og bestem en forkastningsregel ved bruk av normaltilnærming (sentralgrenseteoremet). Gjennomfør hypotesetesten.

Oppgave 2 +



Kritiske verdier i standard normalfordelingen

$$P(Z > z_{\alpha}) = \alpha$$

α	z_{α}
.2	0.842
.15	1.036
.1	1.282
.075	1.440
.05	1.645
.04	1.751
.03	1.881
.025	1.960
.02	2.054
.01	2.326
.005	2.576
.001	3.090
.0005	3.291
.0001	3.719
.00005	3.891
.00001	4.265
.000005	4.417
.000001	4.753

menti

Oppgave 3

Bolter fra en bestemt produksjonslinje har en diameter som vi kan anta er normalfordelt med forventning 9.85 mm og standardavvik 0.05 mm når produksjonen av bolter fungerer som den skal.

Produsenten monitorerer produksjonen ved å jevnlig måle diameterne til stikkprøver på $n = 10$ bolter. Målingene kan brukes til å både sjekke om forventet diameter holder seg til 9.85 mm og om standardavviket ikke blir større enn 0.05 mm.

"Alarm" skal gå ved tegn på at produksjonen ikke er under kontroll. Falske alarmer skal bare inntreffe med 5% sannsynlighet.

- a) Hva slags null- og alternativhypotese gjelder for forventningsverdien?
- b) Hva slags null- og alternativhypotese gjelder for standardavviket (og variansen)?
- c) Hva er egnede testobservatorer og forkastningsregler?

Kritiske verdier i t -fordelingen

$$P(T > t_{\alpha, \nu}) = \alpha$$

$\nu \backslash \alpha$	.150	.100	.075	.050	.025	.010	.005	.001	.0005
1	1.963	3.078	4.165	6.314	12.706	31.821	63.657	318.309	636.619
2	1.386	1.886	2.282	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327	31.599
3	1.250	1.638	1.924	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215	12.924
4	1.190	1.533	1.778	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	1.156	1.476	1.699	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	1.134	1.440	1.650	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	1.119	1.415	1.617	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	1.108	1.397	1.592	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	1.100	1.383	1.574	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	1.093	1.372	1.559	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	1.088	1.363	1.548	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	1.083	1.356	1.538	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	1.079	1.350	1.530	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	1.076	1.345	1.523	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	1.074	1.341	1.517	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	1.071	1.337	1.512	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015

Kritiske verdier i χ^2 -fordelingen

$$P(\chi^2 > \chi_{\alpha, \nu}^2) = \alpha$$

$\nu \backslash \alpha$	.995	.990	.975	.950	.050	.025	.010	.005
1	.000	.000	.001	.004	3.841	5.024	6.635	7.879
2	.010	.020	.051	.103	5.991	7.378	9.210	10.597
3	.072	.115	.216	.352	7.815	9.348	11.345	12.838
4	.207	.297	.484	.711	9.488	11.143	13.277	14.860
5	.412	.554	.831	1.145	11.070	12.833	15.086	16.750
6	.676	.872	1.237	1.635	12.592	14.449	16.812	18.548
7	.989	1.239	1.690	2.167	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.646	2.180	2.733	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.629	6.571	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	5.229	6.262	7.261	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.408	7.564	8.672	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	7.015	8.231	9.390	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	7.633	8.907	10.117	30.144	32.852	36.191	38.582

Hypotesetesting om μ når også verdien til σ^2 er ukjent

★ Situasjon

- la $X_1, X_2, \dots, X_n$ være tilfeldig utvalg fra $N(\mu, \sigma^2)$ -populasjonen
- verdien til μ er ukjent, hypotesetest med $H_0 : \mu = \mu_0$, antar verdien til σ^2 ukjent

★ Da verdien til σ^2 var kjent tok vi utgangspunkt i

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim N(0, 1)$$

★ Siden σ^2 er ukjent erstatter vi denne med estimator, og får

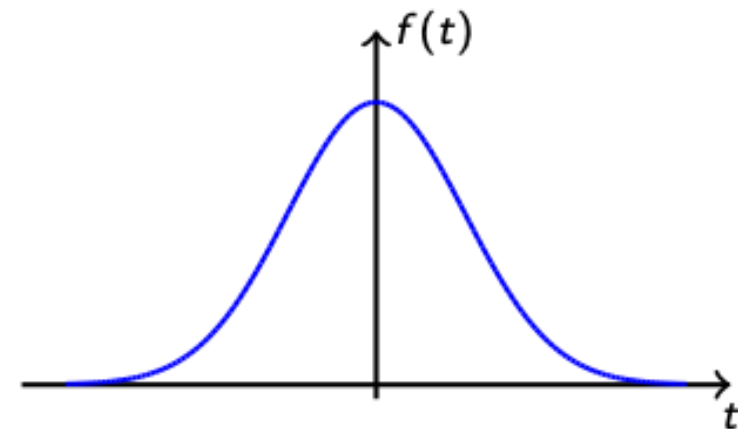
$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}} \quad - \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

★ Vi vet da at

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}} \sim t_{n-1}$$

★ Testobservator

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}}, \quad T \sim t_{n-1} \text{ når } H_0 \text{ sann}$$



Hypotesetesting om σ^2 når også verdien til μ er ukjent

- ★ Situasjon

- la $X_1, X_2, \dots, X_n$ være tilfeldig utvalg fra $N(\mu, \sigma^2)$ -populasjonen
- verdien til σ^2 er ukjent, hypotesetest med $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$, antar verdien til μ ukjent

- ★ Da verdien til μ var kjent tok vi utgangspunkt i

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2 \sim \chi_n^2$$

- ★ Siden μ er ukjent erstatter vi denne med en estimator, og får

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} \right)^2 \quad - \quad \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

- ★ Vi vet da at

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} \right)^2 \sim \chi_{n-1}^2$$

- ★ Testobservator

$$V = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma_0} \right)^2, \quad V \sim \chi_{n-1}^2 \text{ når } H_0 \text{ sann}$$

