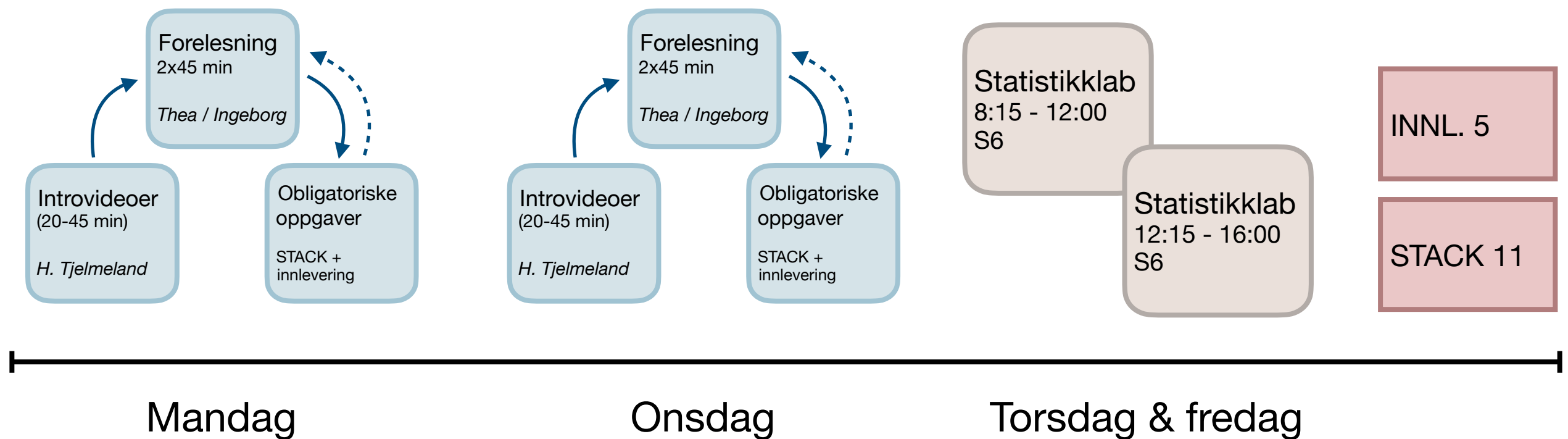
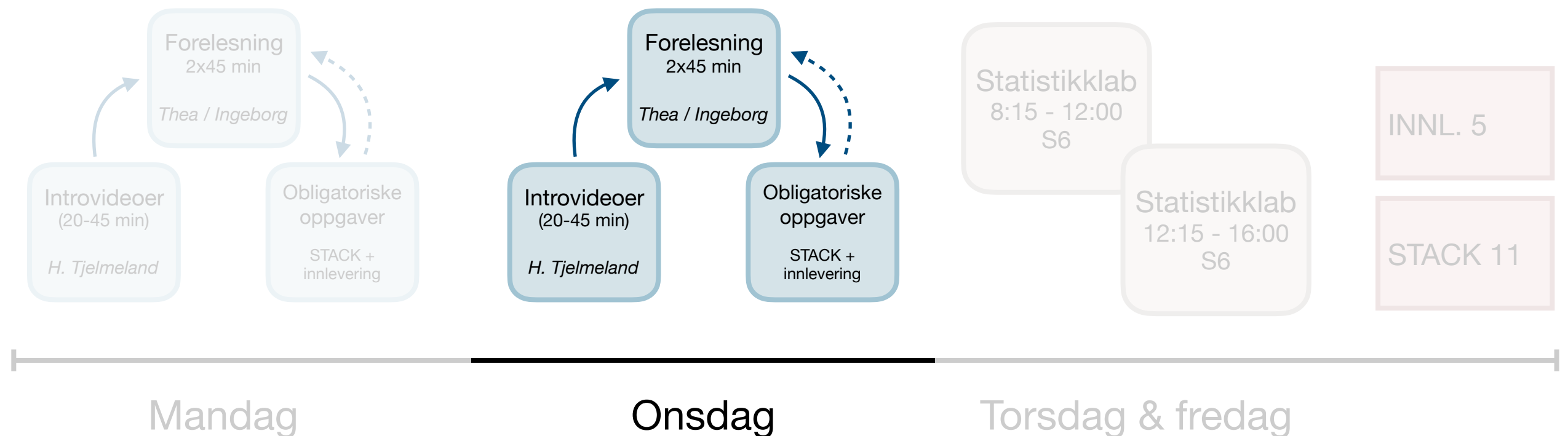


TMA4245 Statistikk

Uke 12 - onsdag



Uke 12 (mandag 18. mars - fredag 22. mars)



Introvideoer

Fortegnstesten

TMA4240/TMA4245 Statistikk

Håkon Tjelmeland

Institutt for matematiske fag

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

Oppgaver

STACK 11: Oppg. 3

INNL. 5: Oppg. 4

To-utvalg permutasjonstest

TMA4240/TMA4245 Statistikk

Håkon Tjelmeland

Institutt for matematiske fag

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet



29. februar 2024: **Etter påske**

Vi følger studiekalenderen. Uka etter påskeferien (kalenderuke 14) blir det derfor forelesning på onsdag 3. april (ingen forelesning 1. april = 2. påskedag). Det blir statistikklab torsdag 4. og fredag 5., og innlevering av en litt mindre STACK-øving enn vanlig 5. april. Deretter fortsetter vi som før.

Det blir 4 forelesninger om lineær regresjon, med John Paige/Karina Lilleborge, før det til slutt er to repetisjonsforelesninger med Thea/Ingeborg.

Hittil: Estimering av parametere i (antatt) kjente fordelinger

Parametrisk test

Nå: Ingen antagelser om fordelinger

Ikke-parametrisk test

Færre antagelser, men lavere teststyrke

OBS!

Fortegnstest og permutasjonstest var nytt i pensum fra høsten 2023.

Få gamle eksamensoppgaver om disse testene,
og ingenting på temasidene,
men det er like fullt en del av pensum!

Husk å lese på disse testene i eksamensperioden også!

Det samme gjelder for de andre delene
av pensum som var nytt høsten 2023.
Vi skal lage en oversikt før
eksamensperioden!

Fortegnstesten

- ★ Anta

- $X_1, X_2, \dots, X_n$ tilfeldig utvalg fra en $f(x)$ -populasjon
- la $\tilde{\mu}$ være medianen i fordelingen $f(x)$, dvs $F(\tilde{\mu}) = 0.5$
- tilhørende observerte verdier er $x_1, x_2, \dots, x_n$

- ★ Ønsker å teste

$$H_0 : \tilde{\mu} = \tilde{\mu}_0 \quad \text{mot} \quad H_1 : \tilde{\mu} > \tilde{\mu}_0$$

- Lager testobservator ved:

- finn fortegnet til $X_i - \tilde{\mu}_0$, dvs vi får et $+$ eller et $-$
- la U være antall $+$ 'er

$$U = \sum_{i=1}^n \mathbb{I}(X_i - \tilde{\mu}_0 > 0)$$

- når H_0 er sann har vi at: $U \sim \text{binomisk}(n, 0.5)$

- ★ Forkaster H_0 dersom $U \geq k$

- ★ Regner ut p -verdien

$$u_{\text{obs}} = \sum_{i=1}^n \mathbb{I}(x_i - \tilde{\mu}_0 > 0)$$

$$p = P(U \geq u_{\text{obs}} | H_0 \text{ sann}) = \sum_{u=u_{\text{obs}}}^n \binom{n}{u} \cdot 0.5^u \cdot 0.5^{n-u}$$

- ★ Husk: hvis $n \geq 10$ kan vi bruke tilnærming til normalfordeling

Oppgave 1

Ved verdensmesterskap på enkeltdistanser på skøyter går hver deltager to 500 meters løp, ett løp hvor deltageren har indre bane i siste sving og ett løp hvor deltageren har ytre bane i siste sving. Rekkefølgen av deltagerne baserer seg på summen av tidene på de to løpene. Tilsvarende regel benyttes også i olympiske leker. Denne regelen ble innført fra og med verdensmesterskapet på Hamar i 1995. Tidligere ble rekkefølgen av deltagerne basert på kun et løp for hver deltager. Bakgrunnen for regelen om at hver deltager skal gå to løp er at det kan være en fordel å ha siste ytre siden løperne har stor fart i siste sving og i indre bane er krumningen større enn i ytre bane.

I et mesterskap med n deltakere, la Y_i og Z_i betegne løpstidene for løper nummer i for løpene med hhv. siste ytre og siste indre. La $X_i = Z_i - Y_i$, altså er X_i positiv når løperen er raskest i siste ytre.

Videre skal vi bruke resultater fra 500 meter for menn i olympiske leker i Sochi 2014 til å vurdere om det er grunnlag for å hevde at det er en fordel å gå siste ytre. Her var det $n = 39$ løpere som fullførte begge løpene, og av disse var det 24 som hadde sin raskeste løpstid i løpet med siste ytre.

Oppgave 1

I de videre utregningene kan du IKKE gjøre approksimasjoner.

Formuler en hypotesetest for situasjonen. Spesifiser H_0 og H_1 , velg en passende testobservator og utled en beslutningsregel når signifikansnivået er $\alpha = 0.05$.

Hva blir konklusjonen av testen for resultatene fra Sochi.

Regn også ut testens p -verdi basert på resultatene fra Sochi.

Definisjon (Signifikansnivå)

Signifikansnivået til en hypotesetest er sannsynligheten for (feilaktig) å forkaste H_0 når H_0 faktisk er riktig

- ★ Notasjon: Lar α betegne signifikansnivået

$$\alpha = P(\text{Forkaste } H_0 \text{ når } H_0 \text{ er sann}) = P(\text{Forkast } H_0 | H_0 \text{ sann})$$

- ★ Fremgangsmåte for å bestemme beslutningsregel for om man skal forkaste H_0 eller ikke
 - velg verdi for signifikansnivået (typisk $\alpha = 0.01$, 0.05 eller 0.10)
 - bestem beslutningsregel slik at $P(\text{Forkast } H_0 | H_0 \text{ sann}) = \alpha$

Oppgave 1

I de videre utregningene kan du IKKE gjøre approksimasjoner.

Formuler en hypotesetest for situasjonen. Spesifiser H_0 og H_1 , velg en passende testobservator og utled en beslutningsregel når signifikansnivået er $\alpha = 0.05$.

Hva blir konklusjonen av testen for resultatene fra Sochi.

Regn også ut testens p -verdi basert på resultatene fra Sochi.

Binomisk fordeling for $n = 39$

x	P(X ≤ x)	x	P(X ≤ x)	x	P(X ≤ x)	x	P(X ≤ x)
0	0E+00	10	0.0017	20	0.6254	30	0.9999
1	0E+00	11	0.0047	21	0.7388	31	1.0000
2	0E+00	12	0.0119	22	0.8316	32	1.0000
3	0E+00	13	0.0266	23	0.9002	33	1.0000
4	0E+00	14	0.0541	24	0.9459	34	1.0000
5	0E+00	15	0.0998	25	0.9734	35	1.0000
6	0E+00	16	0.1684	26	0.9881	36	1.0000
7	0E+00	17	0.2612	27	0.9953	37	1.0000
8	1E-04	18	0.3746	28	0.9983	38	1.0000
9	5E-04	19	0.5000	29	0.9995	39	1.0000

Oppgave 1

Definisjon (p-verdi)

P-verdien er sannsynligheten, når H_0 er sann, for å observere en verdi for testobservatoren som er lik den observerte verdien eller en verdi som er mer ekstrem i retning av den alternative hypotesen.

Regn også ut testens p -verdi basert på resultatene fra Sochi.

Binomisk fordeling for $n = 39$

x	P(X ≤ x)	x	P(X ≤ x)	x	P(X ≤ x)	x	P(X ≤ x)
0	0E+00	10	0.0017	20	0.6254	30	0.9999
1	0E+00	11	0.0047	21	0.7388	31	1.0000
2	0E+00	12	0.0119	22	0.8316	32	1.0000
3	0E+00	13	0.0266	23	0.9002	33	1.0000
4	0E+00	14	0.0541	24	0.9459	34	1.0000
5	0E+00	15	0.0998	25	0.9734	35	1.0000
6	0E+00	16	0.1684	26	0.9881	36	1.0000
7	0E+00	17	0.2612	27	0.9953	37	1.0000
8	1E-04	18	0.3746	28	0.9983	38	1.0000
9	5E-04	19	0.5000	29	0.9995	39	1.0000

Oppgave 1

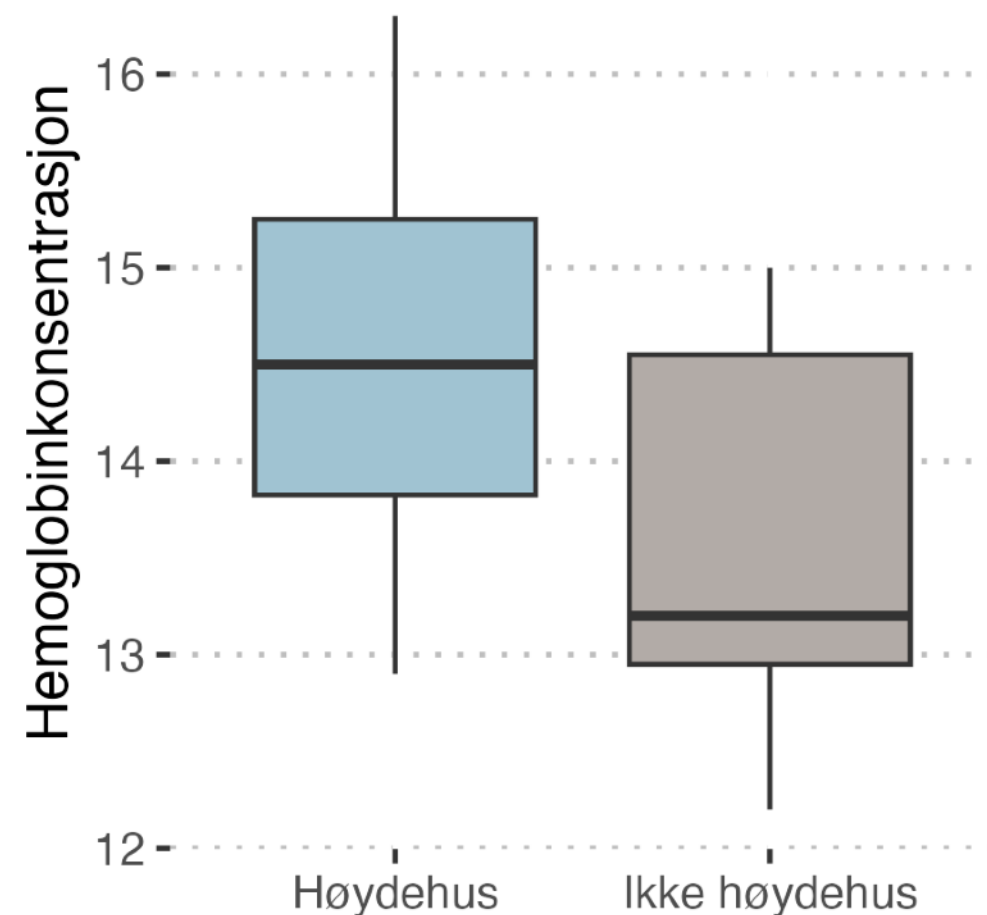
I **oppgave 2d** skal differansen av tidene brukes istedenfor bare fortegnet på differansen, og vi kan anta en t -fordelt testobservator. Dette gir en annen, og mer nøyaktig, test! Anbefaler dere å løse denne oppgaven også.

Oppgave 2

Vi ønsker å sjekke om det er forskjell i hemoglobinkonsentrasjonen (blodprosent) hos tilsynelatende like idrettsutøvere. Vi har gjort målinger av 13 utøvere, der noen har tilbragt tid i høydehus, og andre ikke.

Hemoglobin (g/100lm)	
Høydehus	Ikke høydehus
16.3	15.0
15.4	14.3
14.2	14.9
13.7	13.2
14.8	12.2
12.9	13.1
	12.8

- a) Ser det ut til at høydehus har en effekt på hemoglobinkonsentrasjonen?



Oppgave 2

Vi ønsker å sjekke om det er forskjell i hemoglobinkonsentrasjonen (blodprosent) hos tilsynelatende like idrettsutøvere. Vi har gjort målinger av 13 utøvere, der noen har tilbragt tid i høydehus, og andre ikke.

Hemoglobin (g/100lm)	
Høydehus	Ikke høydehus
16.3	15.0
15.4	14.3
14.2	14.9
13.7	13.2
14.8	12.2
12.9	13.1
	12.8

- b) Formuler en nullhypotese og en alternativ hypotese for å avgjøre om høydehus kan øke hemoglobinkonsentrasjonen, og beskriv en passende beslutningsregel.
- c) Beskriv med pseudokode hvordan vi kan regne ut p -verdien i en permutasjonstest med observasjonene vi har eksakt.

To-utvalg permutasjonstest

- ★ Anta $n + m$ pasienter totalt
 - n pasienter får tradisjonell behandling
 - m pasienter får ny behandling
- ★ Antall mulige inndelinger av $n + m$ pasienter i to grupper, n i første og m i andre

$$\binom{n+m}{n, m} = \frac{(n+m)!}{n! \cdot m!}$$

- ★ La u^* være observert verdi for testobservator
- ★ La $u_i, i = 1, 2, \dots, \binom{n+m}{n, m}$ være verdi for testobservator for hver av de mulige inndelingene i to grupper
- ★ Anta stor verdi av testobservator indikerer at H_1 er korrekt
- ★ p-verdien blir

$$p = \frac{1}{\binom{n+m}{n, m}} \sum_{i=1}^{\binom{n+m}{n, m}} \mathbb{I}(u_i \geq u^*)$$

Oppgave 2

Vi ønsker å sjekke om det er forskjell i hemoglobinkonsentrasjonen (blodprosent) hos tilsynelatende like idrettsutøvere. Vi har gjort målinger av 13 utøvere, der noen har tilbragt tid i høydehus, og andre ikke.

Hemoglobin (g/100lm)	
Høydehus	Ikke høydehus
16.3	15.0
15.4	14.3
14.2	14.9
13.7	13.2
14.8	12.2
12.9	13.1
	12.8

- b) Formuler en nullhypotese og en alternativ hypotese for å avgjøre om høydehus kan øke hemoglobinkonsentrasjonen, og beskriv en passende beslutningsregel.
- c) Beskriv med pseudokode hvordan vi kan regne ut p -verdien i en permutasjonstest med observasjonene vi har eksakt.
- d) Implementer og vurder resultatet ved signifikansnivå 5%.

```
import numpy as np
from random import sample
```

Permutasjonstest, oppgave 2

```
obs = [16.3, 15.4, 14.2, 13.7, 14.8, 12.9, 15.0, 14.3, 14.9, 13.2, 12.2, 13.1, 12.8]
n1 = 6 # første n1 er høydehus
n2 = 7 # siste n2 er ikke høydehus
```

```
u_star = np.mean(obs[0:n1]) - np.mean(obs[n1:(n1+n2)])
u_star
```

0.9071428571428601

```
import itertools
combs = np.array(list(itertools.combinations(range(13), 6))) # til høydehus-gruppe
other_combs = np.array([np.where(~np.isin(range(13), combs[i]))[0] for i in range(len(combs))]) # resten
len(combs) # riktig lengde
```

1716

```
u = np.zeros(len(combs))
for i in range(len(combs)):
    u[i] = np.mean(np.array(obs)[combs[i]]) - np.mean(np.array(obs)[other_combs[i]])

p_est = np.mean(u >= np.round(u_star, 10))
p_est
```

0.09731934731934731

Oppgave 3

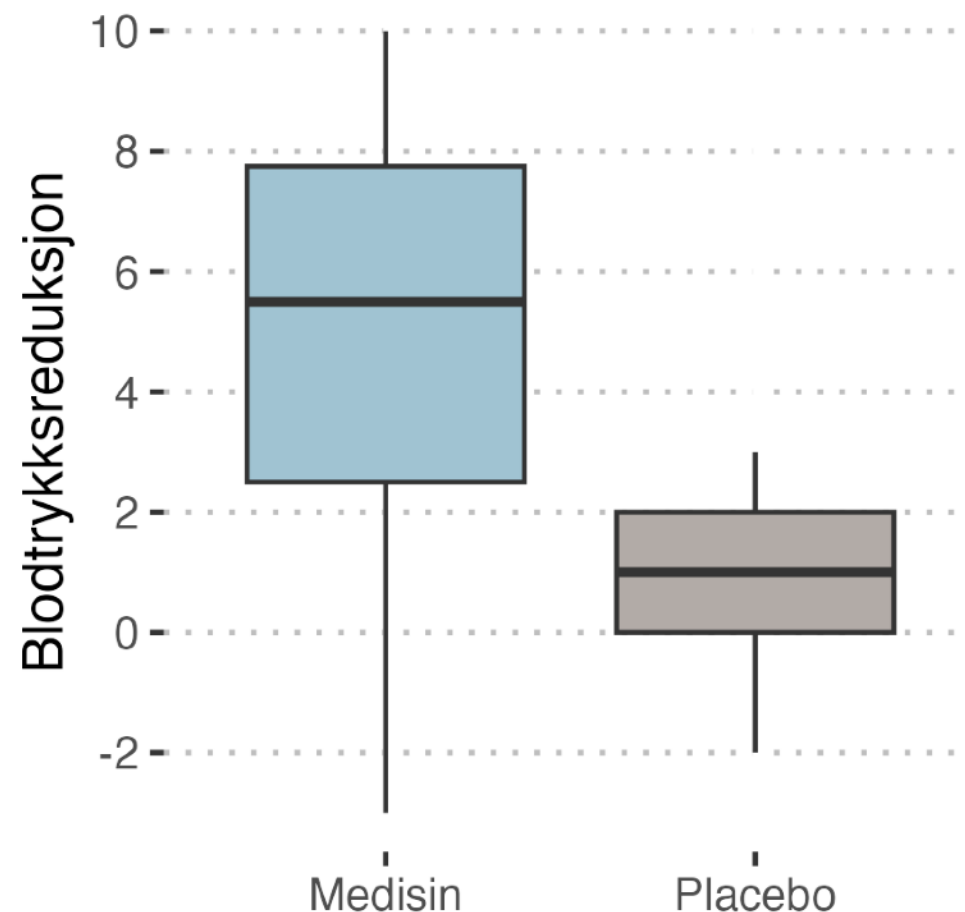
En lege ønsker å teste en blodtrykksmedisin.

Legen gir 10 pasienter medisin i én måned, og 9 pasienter placebo.

Etter denne måneden registrerer legen følgende reduksjon i blodtrykk hos pasientene:

Blodtrykksreduksjon	
Medisin	Placebo
8	2
4	3
6	-2
-3	0
10	1
5	1
-1	-1
2	3
9	0
7	

a) Ser det ut til at medisinen har en effekt?



Oppgave 3

En lege ønsker å teste en blodtrykksmedisin.

Legen gir 10 pasienter medisin i én måned, og 9 pasienter placebo.

Etter denne måneden registrerer legen følgende reduksjon i blodtrykk hos pasientene:

Blodtrykksreduksjon	
Medisin	Placebo
8	2
4	3
6	-2
-3	0
10	1
5	1
-1	-1
2	3
9	0
7	

- b) Formuler en nullhypotese og en alternativ hypotese for å avgjøre om medisinen har en effekt, og beskriv en passende beslutningsregel.
- c) Beskriv med pseudokode hvordan stokastisk simulering kan brukes for å *estimere* p -verdien i en permutasjonstest med observasjonene vi har.

To-utvalg permutasjonstest og stokastisk simulering

- ★ Anta $n + m$ pasienter totalt
 - n pasienter får tradisjonell behandling
 - m pasienter får ny behandling
- ★ Antall mulige inndelinger av $n + m$ pasienter i to grupper, n i første og m i andre

$$\binom{n + m}{n, m} = \frac{(n + m)!}{n! \cdot m!}$$

- ★ La u^* være observert verdi for testobservator
- ★ Trekk tilfeldig s gruppeinndelinger (uavhengig av hverandre)
 - la u_i være verdi av testobservator ved å bruke i -te gruppeinndeling
- ★ Vi har da $s + 1$ verdier av testobservatoren: $u^*, u_1, u_2, \dots, u_s$
- ★ Anta stor verdi av testobservator indikerer at H_1 er korrekt
- ★ Estimert verdi for p-verdien blir

$$\hat{p} = \frac{1}{s + 1} \left(1 + \sum_{i=1}^s \mathbb{I}(u_i \geq u^*) \right)$$

Oppgave 3

En lege ønsker å teste en blodtrykksmedisin.

Legen gir 10 pasienter medisin i én måned, og 9 pasienter placebo.

Etter denne måneden registrerer legen følgende reduksjon i blodtrykk hos pasientene:

Blodtrykksreduksjon	
Medisin	Placebo
8	2
4	3
6	-2
-3	0
10	1
5	1
-1	-1
2	3
9	0
7	

- b) Formuler en nullhypotese og en alternativ hypotese for å avgjøre om medisinen har en effekt, og beskriv en passende beslutningsregel.
- c) Beskriv med pseudokode hvordan stokastisk simulering kan brukes for å *estimere* p -verdien i en permutasjonstest med observasjonene vi har.
- d) Implementer og vurder resultatet ved signifikansnivå 5%.

```
import numpy as np
from random import sample
```

Permutasjonstest, oppgave 3

```
obs = [8, 4, 6, -3, 10, 5, -1, 2, 9, 7, 2, 3, -2, 0, 1, 1, -1, 3, 0]
n1 = 10 # første n1 er medisin
n2 = 9 # siste n2 er placebo
N = 10000
```

```
u_star = np.mean(obs[0:n1]) - np.mean(obs[n1:(n1+n2)])
u_star
```

3.9222222222222225

```
u = np.zeros(N)
for i in range(N):
    obs_perm = sample(obs, len(obs))
    u[i] = np.mean(obs_perm[0:n1]) - np.mean(obs_perm[n1:(n1+n2)])

p_est = (np.sum(u >= u_star) + 1)/(len(u) + 1)
p_est
```

0.012798720127987202

Ukas forelesninger er ferdige!

Oppgaver

STACK 11: Hele
INN. 5: Hele

Torsdag

Statistikklab
8:15 - 12:00 S6

Fredag

Statistikklab
12:15 - 16:00 S6

INN.

Frist 23:59

STACK

Frist 23:59

Torsdag & fredag

GOD PÅSKE!

