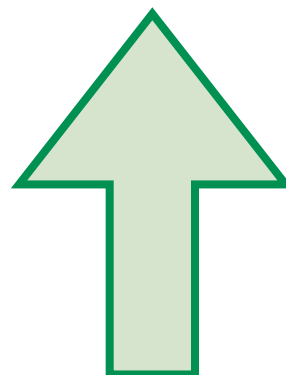
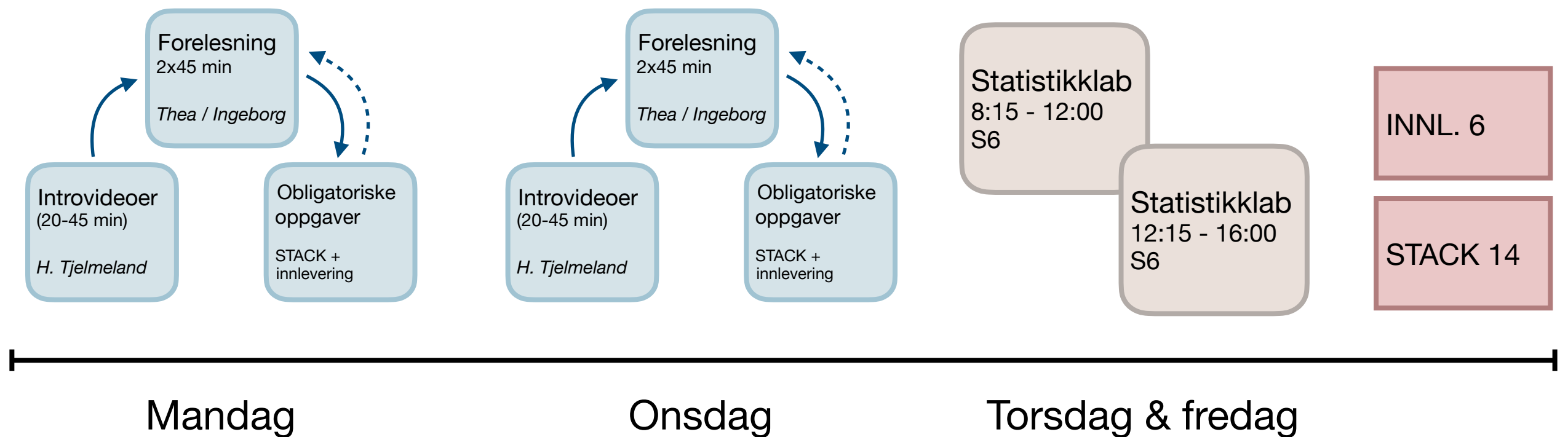
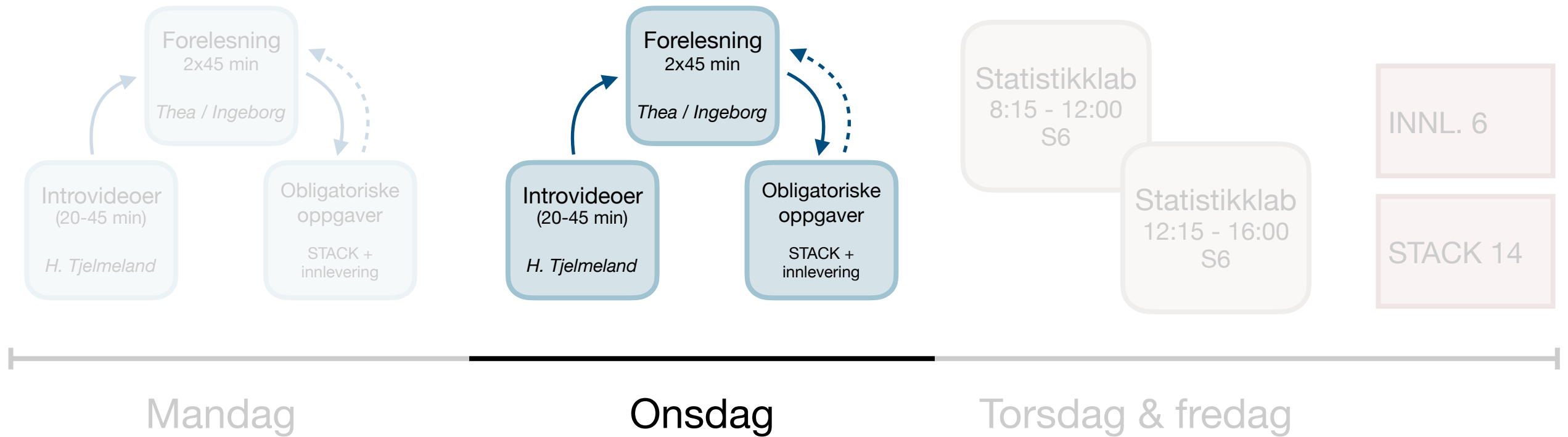


TMA4245 Statistikk

Uke 16 - onsdag



Uke 16 (mandag 15. april - fredag 19. april)



Introvideoer

Ingen spesifikke videoer, men alle 57 videoer kan være relevante i dag!

Plan

I dag: Grundig gjennomgang av gamle eksamensoppgaver

Mandag: Flere oppgaver, og informasjon om tiden før eksamen og eksamen

Hjelp før eksamen:

Digitalt forum åpent 24/7 (besvares i vanlig arbeidstid) (e-post til faglærere om oppgaver og pensum blir ikke besvart!)

Eksamenslab:

Tirsdag 21/5 10:15-14:00 i S3

Torsdag 23/5 10:15-14:00 i S3

Siste ordinære
statistikklab er 19/4.

27. mai klokka 09:00: Eksamen

Tillatte hjelpemidler på eksamen

Tabeller og formler i statistikk



Bestemt, enkel kalkulator

Ett stemplet gult A5-ark med egne håndskrevne (skrevet rett på arket) formler og notater

Du kan skrive på alle sider og med alle farger (anbefaler ikke tusj)

Obs!

Noe nytt pensum fra høsten 2023 (Python, stokastisk simulering, feilforplantning, fortegnstest, permutasjonstest).

Få/ingen gamle eksamensoppgaver om disse temaene, og ingenting på temasidene, men det er like fullt en del av pensum!

Husk å lese på disse temaene i eksamensperioden også!

Vi har laget en side på wikisidene (“Nytt pensum”) der vi skriver utfyllende om dette. Vi henviser også til relevante oppgaver i øvingsopplegget/forelesninger.

Oppgave 1, august 2022

Innledning: La A , B og C være tre hendelser i et utfallsrom S . Følgende sannsynligheter er oppgitt,

- $P(A) = 0.500$,
- $P(B) = 0.400$,
- $P(C) = 0.300$,
- $P(A \cap B) = 0.300$,
- $P(C|(A \cup B)') = 0.200$,

hvor $(A \cup B)' = S \setminus (A \cup B)$ som vanlig betegner komplementet til hendelsen $A \cup B$.

Oppgave: Bestem følgende sannsynligheter. Angi svarene med tre desimaler etter komma.

- $P(A \cup B) =$
- $P(B|A) =$
- $P(C|A \cup B) =$

Oppgave 1, august 2022

Innledning: La A , B og C være tre hendelser i et utfallsrom S . Følgende sannsynligheter er oppgitt,

- $P(A) = 0.500$,
- $P(B) = 0.400$,
- $P(C) = 0.300$,
- $P(A \cap B) = 0.300$,
- $P(C|(A \cup B)') = 0.200$,

hvor $(A \cup B)' = S \setminus (A \cup B)$ som vanlig betegner komplementet til hendelsen $A \cup B$.

Oppgave: Bestem følgende sannsynligheter. Angi svarene med tre desimaler etter komma.

- $P(A \cup B) =$
- $P(B|A) =$
- $P(C|A \cup B) =$

Setningen om total sannsynlighet

La $B_1, \dots, B_k$ være en partisjon av utfallsrommet. Da er

$$P(A) = \sum_{i=1}^k P(A|B_i)P(B_i).$$

Oppgave 1, desember 2009

La X være en kontinuerlig fordelt stokastisk variabel med sannsynlighetstetthet

$$f(x) = \begin{cases} k(4x+1) & \text{for } x \in [0, 1], \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases}$$

der k er en konstant.

a) Regn ut hvilken verdi konstanten k må ha. Skisser $f(x)$.

Finn den kumulative fordelingsfunksjonen $F(x) = P(X \leq x)$.

Finn sannsynlighetene

$$P\left(X > \frac{1}{4}\right) \quad \text{og} \quad P\left(X > \frac{1}{2} \mid X > \frac{1}{4}\right).$$

La også Y være en kontinuerlig fordelt stokastisk variabel, og la betinget sannsynlighetstetthet for Y gitt $X = x$ være gitt ved

$$f(y|x) = \begin{cases} \frac{4x+2y}{4x+1} & \text{for } y \in [0, 1], \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

b) Finn simultan sannsynlighetstetthet for X og Y .

Finn marginal sannsynlighetstetthet for Y .

Finn sannsynligheten

$$P(Y \leq X).$$

Oppgave 2a, november 2017

To operasjonsavdelinger ved et sykehus i en større by har en felles oppfølgingsavdeling. Vi skal her kalle de to operasjonsavdelingene for henholdsvis avdeling A og avdeling B. Pasienter som er utskrevet fra sykehuset etter en operasjon ved en av de to avdelingene kan, hvis de ønsker det, oppsøke oppfølgingsavdelingen for videre veiledning og kontroller. Vi skal anta at antall ganger en pasient som er operert ved avdeling A oppsøker oppfølgingsavdelingen er poissonfordelt med forventningsverdi $\mu_A = 1.4$, og tilsvarende at antall ganger en pasient som er operert ved avdeling B oppsøker oppfølgingsavdelingen er poissonfordelt med forventningsverdi $\mu_B = 0.81$.

Vi skal også betrakte det som kjent at av alle pasienter som opereres ved de to avdelingene blir 66% operert ved avdeling A.

- a) Regn ut sannsynligheten for at en pasient som er operert ved avdeling A har ingen besøk hos oppfølgingsavdelingen.

Gitt at en pasient som er operert ved avdeling A har minst et besøk hos oppfølgingsavdelingen, regn ut sannsynligheten for at denne pasienten har mer enn to besøk hos oppfølgingsavdelingen.

Regn også ut sannsynligheten for at en tilfeldig valgt pasient har ingen besøk til oppfølgingsavdelingen.

Oppgave 2a, november 2017

To operasjonsavdelinger ved et sykehus i en større by har en felles oppfølgingsavdeling. Vi skal her kalle de to operasjonsavdelingene for henholdsvis avdeling A og avdeling B. Pasienter som er utskrevet fra sykehuset etter en operasjon ved en av de to avdelingene kan, hvis de ønsker det, oppsøke oppfølgingsavdelingen for videre veiledning og kontroller. Vi skal anta at antall ganger en pasient som er operert ved avdeling A oppsøker oppfølgingsavdelingen er poissonfordelt med forventningsverdi $\mu_A = 1.4$, og tilsvarende at antall ganger en pasient som er operert ved avdeling B oppsøker oppfølgingsavdelingen er poissonfordelt med forventningsverdi $\mu_B = 0.81$.

Vi skal også betrakte det som kjent at av alle pasienter som opereres ved de to avdelingene blir 66% operert ved avdeling A.

- a) Regn ut sannsynligheten for at en pasient som er operert ved avdeling A har ingen besøk hos oppfølgingsavdelingen.

Gitt at en pasient som er operert ved avdeling A har minst et besøk hos oppfølgingsavdelingen, regn ut sannsynligheten for at denne pasienten har mer enn to besøk hos oppfølgingsavdelingen.

Regn også ut sannsynligheten for at en tilfeldig valgt pasient har ingen besøk til oppfølgingsavdelingen.

Poissonfordeling

$$f(x) = p(x; \mu) = \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

$$E(X) = \mu, \quad \text{Var}(X) = \mu, \quad M_X(t) = e^{\mu(e^t - 1)}.$$

Oppgave 6, august 2019

La X_1 , X_2 og X_3 være uavhengige poissonfordelte stokastiske variabler med forventningsverdi henholdsvis μ_1 , μ_2 og μ_3 .

La

$$Z_i = \begin{cases} 1 & \text{hvis } X_i = X_3 = 0 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases} \quad (5)$$

for $i = 1, 2$.

- a) Vis at Z_i er bernoullifordelt, det vil si binomisk fordelt med $n = 1$ delforsøk, med suksessannsynlighet $p_i = e^{-(\mu_i + \mu_3)}$, og bruk dette til å finne forventningsverdien og variansen til Z_i for $i = 1, 2$.

Bruk dette til å utlede et uttrykk for kovariansen mellom Z_1 og Z_2 , det vil si $\text{Cov}(Z_1, Z_2)$.

Oppgave 6, august 2019

La X_1 , X_2 og X_3 være uavhengige poissonfordelte stokastiske variabler med forventningsverdi henholdsvis μ_1 , μ_2 og μ_3 .

La

$$Z_i = \begin{cases} 1 & \text{hvis } X_i = X_3 = 0 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases} \quad (5)$$

for $i = 1, 2$.

- a) Vis at Z_i er bernoullifordelt, det vil si binomisk fordelt med $n = 1$ delforsøk, med suksessannsynlighet $p_i = e^{-(\mu_i + \mu_3)}$, og bruk dette til å finne forventningsverdien og variansen til Z_i for $i = 1, 2$.

Bruk dette til å utlede et uttrykk for kovariansen mellom Z_1 og Z_2 , det vil si $\text{Cov}(Z_1, Z_2)$.

Poissonfordeling

$$f(x) = p(x; \mu) = \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{E}(X) = \mu, \quad \text{Var}(X) = \mu, \quad M_X(t) = e^{\mu(e^t - 1)}.$$

Binomisk fordeling

$$f(x) = b(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \dots, n.$$

$$\text{E}(X) = np, \quad \text{Var}(X) = np(1 - p), \quad M_X(t) = (pe^t + 1 - p)^n.$$

Kovariansen mellom X og Y

$$\text{Cov}(X, Y) = \text{E}(XY) - \text{E}(X)\text{E}(Y).$$

Oppgave 3, desember 2009

En metallurg har vært med på å utvikle en ny legering og skal presentere ulike egenskaper ved legeringen til sine kolleger. Vi skal her se på bestemmelse av smeltepunktet til legeringen.

Til å bestemme smeltepunktet til legeringen har metallurgen to målemetoder. Vi kaller disse henholdsvis målemetode A og målemetode B. På grunn av målefeil kan gjentatte målinger av smeltepunktet ved målemetode A antas å være realisasjoner av uavhengige og normalfordelte variabler med forventningsverdi μ og varians σ_A^2 . Metallurgen ønsker å estimere forventningsverdien μ . Tilsvarende kan gjentatte målinger av smeltepunktet ved målemetode B antas å være realisasjoner av uavhengige og normalfordelte variabler med forventningsverdi μ og varians σ_B^2 .

Vi skal i denne oppgaven anta at variansene σ_A^2 og σ_B^2 har kjente verdier, mens den felles forventningsverdien μ er ukjent og skal estimeres. Til dette formål gjør metallurgen n målinger med målemetode A og m målinger med målemetode B. La $X_1, X_2, \dots, X_n$ betegne resultatene av målingene ved metode A og la $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ betegne resultatene av målingene ved metode B. Vi skal også anta at $X_1, X_2, \dots, X_n$ er uavhengig av $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$.

Som estimator for μ benytter metallurgen

$$\hat{\mu} = a\bar{X} + b\bar{Y} = \frac{a}{n} \sum_{i=1}^n X_i + \frac{b}{m} \sum_{i=1}^m Y_i,$$

der a og b er to konstanter.

- a) Benytt regneregler for forventningsverdi og varians til å vise at

$$E(\hat{\mu}) = (a + b)\mu \quad \text{og} \quad \text{Var}(\hat{\mu}) = \frac{a^2\sigma_A^2}{n} + \frac{b^2\sigma_B^2}{m}.$$

- b) Bestem verdier for konstantene a og b slik at $\hat{\mu}$ blir en best mulig estimator for μ .

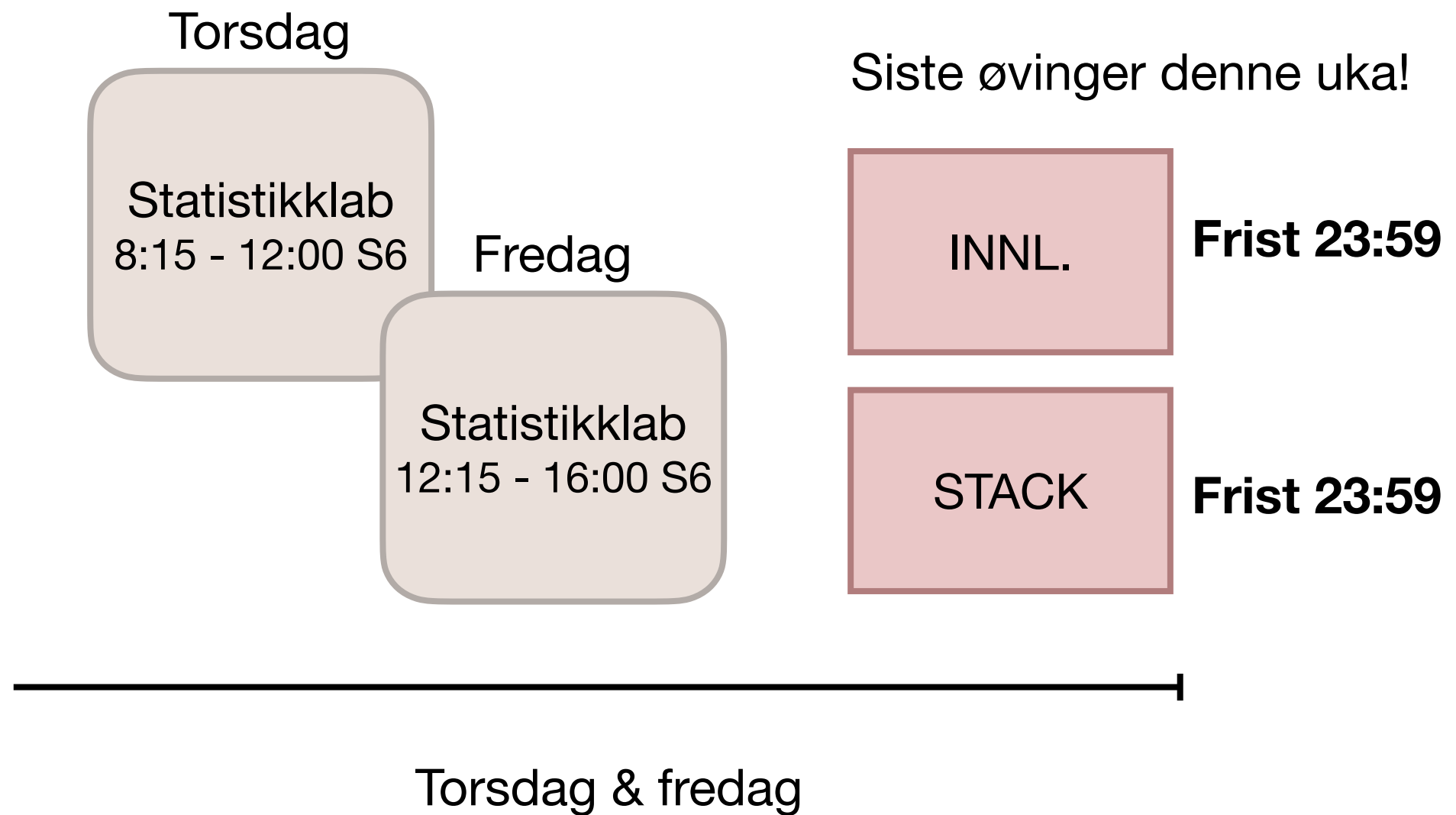
Videre i oppgaven skal du fremdeles ta utgangspunkt i $\hat{\mu} = a\bar{X} + b\bar{Y}$, dvs du skal **ikke** benytte de optimale verdiene for a og b du fant i punkt b).

- c) Hvilken type sannsynlighetsfordeling har $\hat{\mu}$? Begrunn svaret.

Utled et $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ konfidensintervall for μ .

- (d) Bestem hvordan konstantene a og b bør velges for at konfidensintervallet du utledet i punkt c) skal bli kortest mulig. Sammenlign med resultatet i punkt b) og kommenter.)

Mandag 22/4: Informasjon om eksamen (siste forelesning)



Lykke til på eksamen!!!