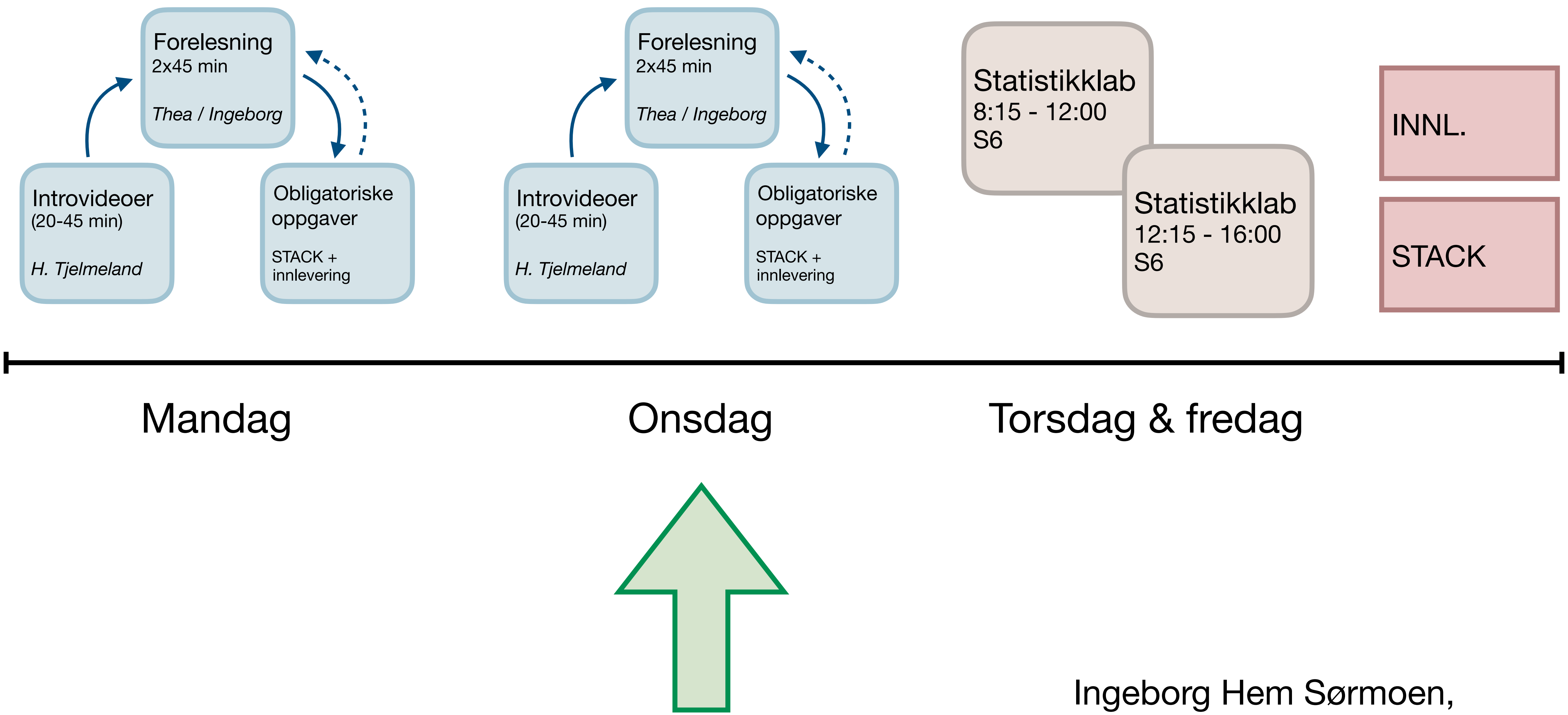
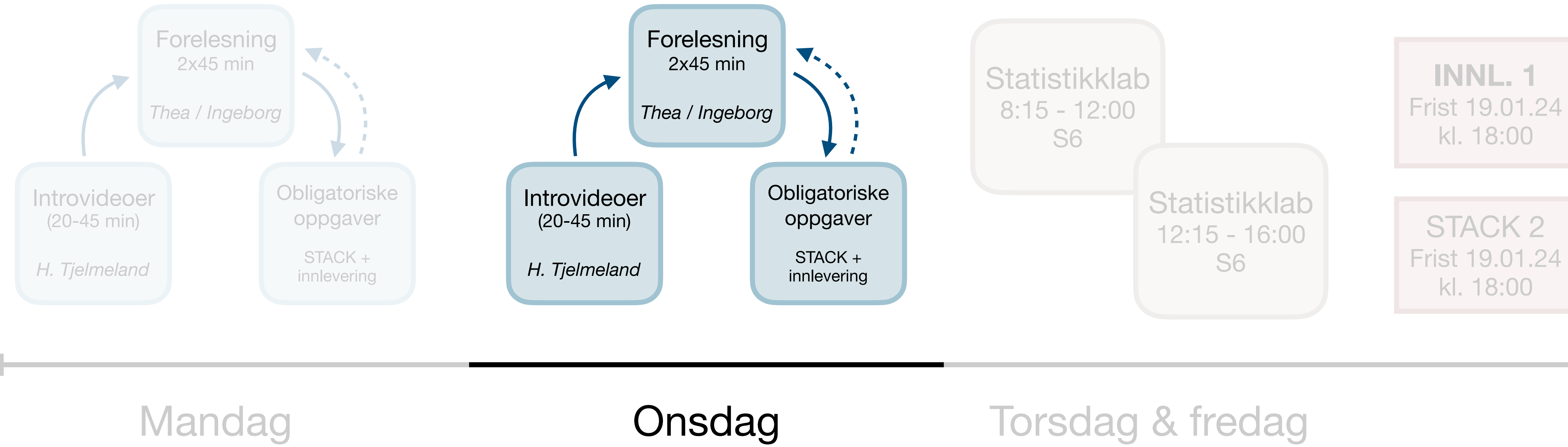
TMA4245 Statistikk

Uke 3 - onsdag

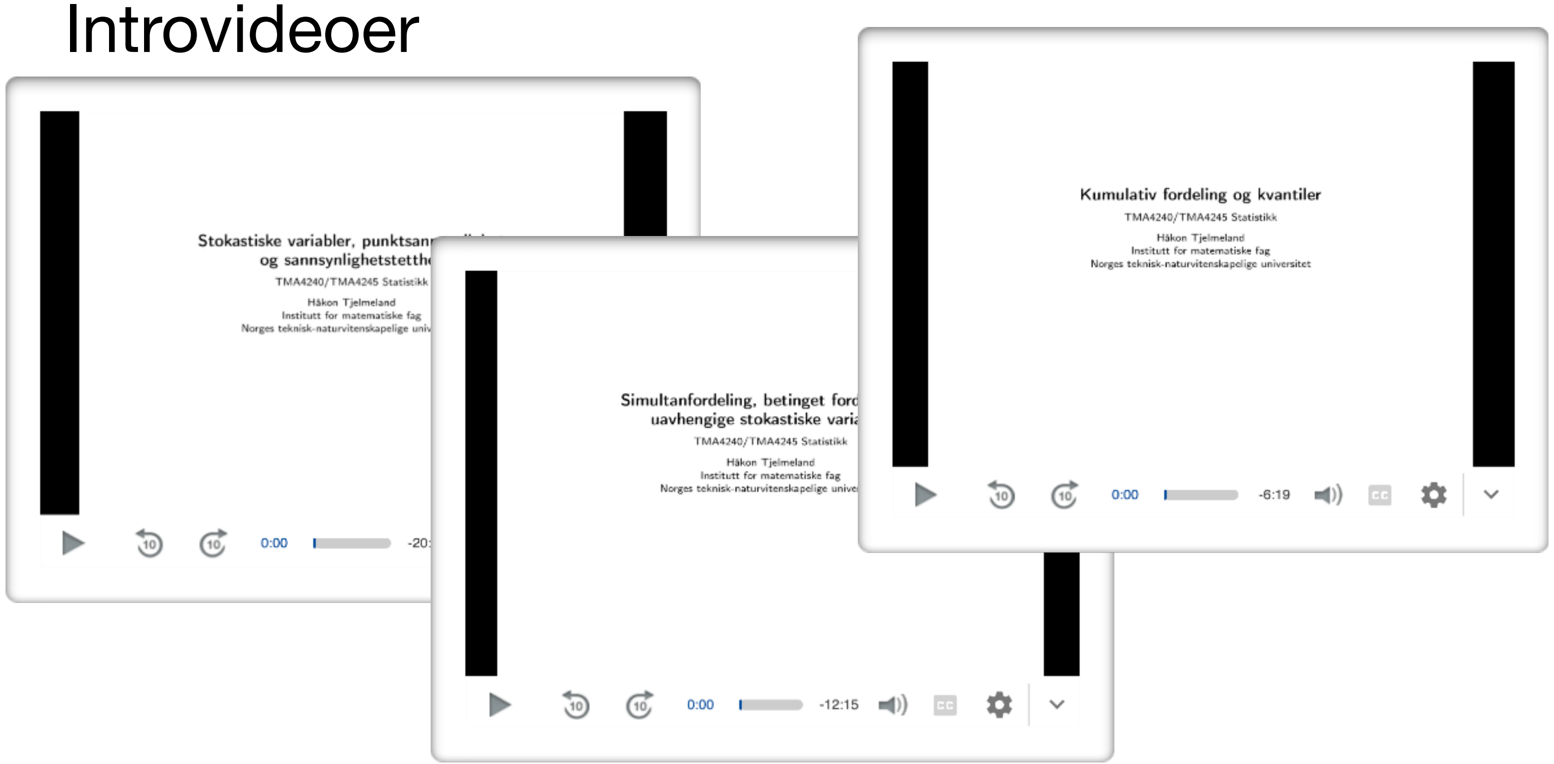


Ingeborg Hem Sørmoen,
Institutt for matematiske fag, NTNU

Uke 3 (mandag 15. januar - fredag 19. januar)



Introvideoer



Oppgaver

STACK 2: Oppg. 4-6
INNL. 1: Oppg. 6, 7 og 8

Referansegruppe?

Send epost til:

Faglærere:

- Thea Bjørnland (thea.bjornland@ntnu.no)
- Ingeborg Hem Sørmoen (ingeborg.hem@ntnu.no)

I dag

1. Stokastiske variabler
   Punktsannsynlighet
   Sannsynlighetstetthet

2. Kumulativ fordeling
   Kvantiler

3. Simultanfordeling
   Betinget fordeling
   Uavhengige stokastiske variabler

Onsdag 17. januar

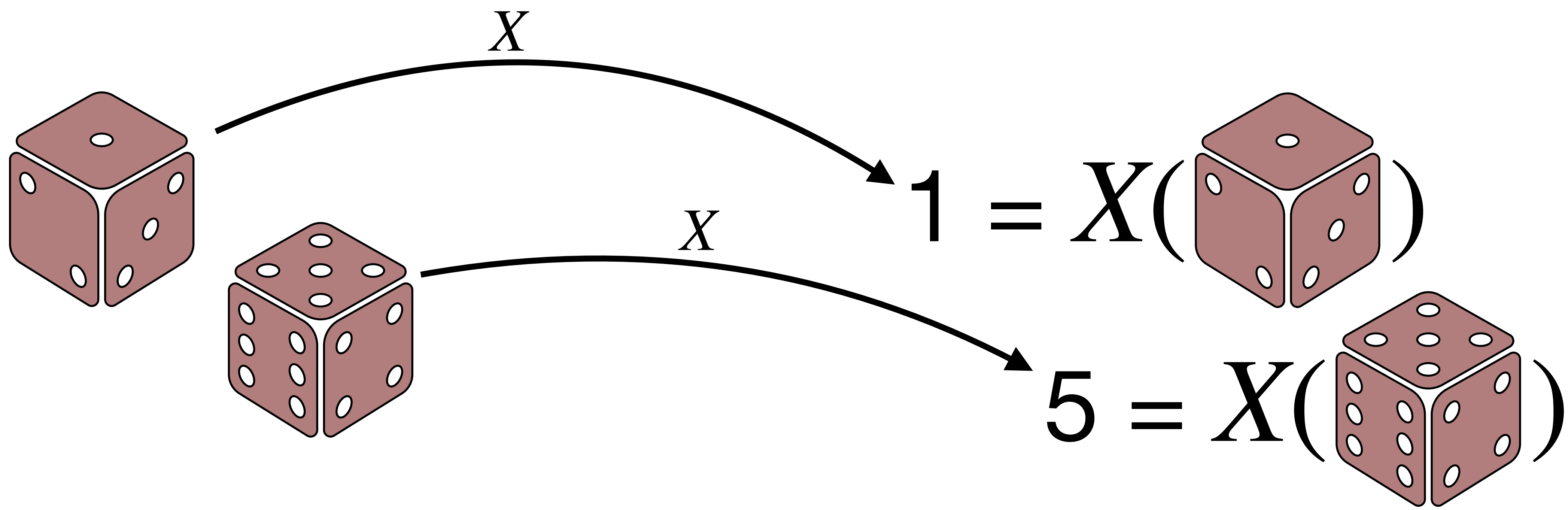
Stokastiske variabler, punktsannsynlighet og sannsynlighetstetthet (20:26) (pdf)
Kumulativ fordeling og kvantiler (06:18) (pdf)
Simultanfordeling, betinget fordeling og uavhengige stokastiske variabler (12:15) (pdf)
Forelesningsnotater og slides

OBS!

X $\qquad$ x

Stokastisk variabel $\qquad$ Realisering

STOR bokstav $\qquad$ liten bokstav



X er en funksjon fra utfallsrommet S til den reelle tallinja

$x = X(e)$, der $e \in S$ er en hendelse

Oppgave 1

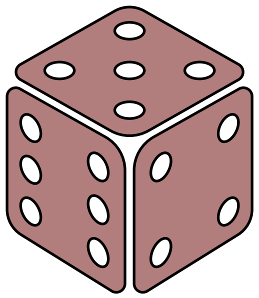
Stokastisk forsøk: Vi kaster en terning.

a) Hva består utfallsrommet S av?

b) Hva slags type stokastisk variabel X er det hensiktsmessig å knytte til dette forsøket? (diskret/kontinuerlig, endelig/uendelig, tellbar/ikke-tellbar)

c) Hvilke verdier kan X ta?

d) Hva er sannsynligheten for å få en femmer?



e) Hvordan betegner vi sannsynligheten for å få en femmer ved bruk av X?

f) Hva er sannsynligheten for å få et hvilket som helst terningkast?

Dette er en diskret sannsynlighetsfordeling.
Den har et navn: Diskret uniformfordeling.

Oppgave 2

La X være en diskret fordelt stokastisk variabel med utfallsrom $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Punktsannsynlighetene for hvert utfall er gitt ved følgende tabell:

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	0.1	0.1	0.5	0.2	0.1

a) Sjekk at dette er en gyldig punktsannsynlighet.

b) Bestem sannsynlighetene $P(X \geq 0)$ og $P(X \geq 0 \,|\, X \leq 1)$.

c) Regn ut den kumulative fordelingen.

d) Tegn sannsynlighetsfordelingen og den kumulative fordelingen.

Definisjon (Punktsannsynlighet)

En funksjon $f(x)$ kalles punktsannsynlighet for en SV X dersom, for alle x,

$$f(x) = P(X = x)$$

- Merk at vi vil ha
  - $f(x) \geq 0$ for alle x
  - $\sum_x f(x) = 1$

$$F(x) = \sum_{t=0}^{x} f(t)$$

Betinget sannsynlighet:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Multiplikasjonssetningen:

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

Relevant for INNL. 1: Oppg. 6

Oppgave 3

La X være en kontinuerlig stokastisk variabel med sannsynlighetstetthet

$$f(x) = \begin{cases} k(1 - x^2), & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$$

der k er en konstant.

a) Bestem k slik at $f(x)$ er en gyldig sannsynlighetstetthet.

b) Skisser $f(x)$.

c) Bestem sannsynlighetene $P(X \leq 0.6)$ og $P(X \leq 8 \,|\, X > 0.6)$.

Definisjon (Sannsynlighetstetthet)

Sannsynlighetstettheten $f(x)$ for en kontinuerlig SV X er gitt ved

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

for alle $a < b$.

- ⋆ Merk at vi vil ha
  - $f(x) \geq 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$
  - $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Oppgave 3

La X være en kontinuerlig stokastisk variabel med sannsynlighetstetthet

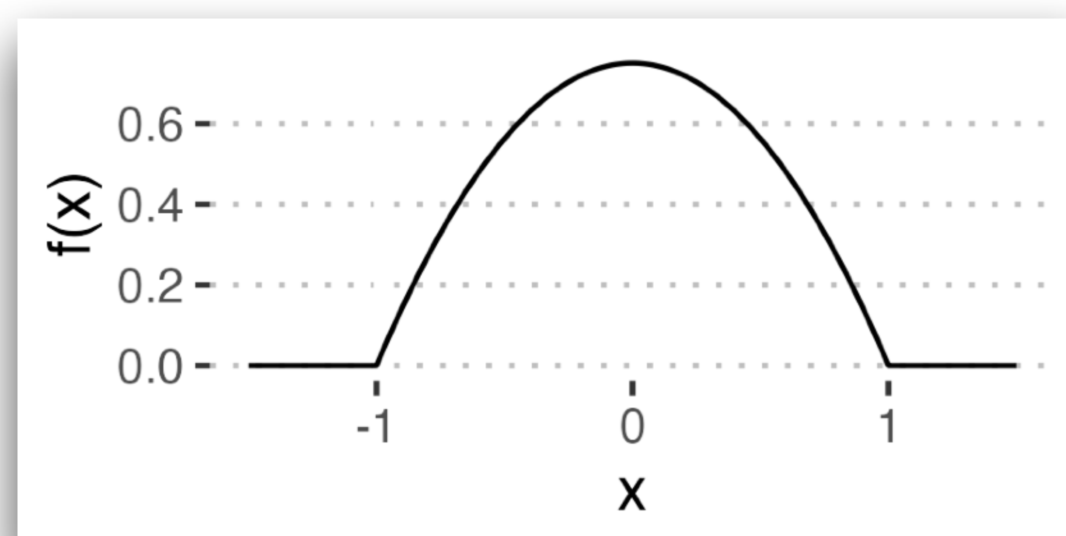
$$f(x) = \begin{cases} k(1-x^2), & -1 \le x \le 1 \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$$

der k er en konstant.

a) Bestem k slik at $f(x)$ er en gyldig sannsynlighetstetthet.

b) Skisser $f(x)$.

c) Bestem sannsynlighetene $P(X \le 0.6)$ og $P(X \le 8 \,|\, X > 0.6)$.



Oppgave 3

La X være en kontinuerlig stokastisk variabel med sannsynlighetstetthet

$$f(x) = \begin{cases} k(1-x^2), & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$$

der k er en konstant.

a) Bestem k slik at $f(x)$ er en gyldig sannsynlighetstetthet.

b) Skisser $f(x)$.

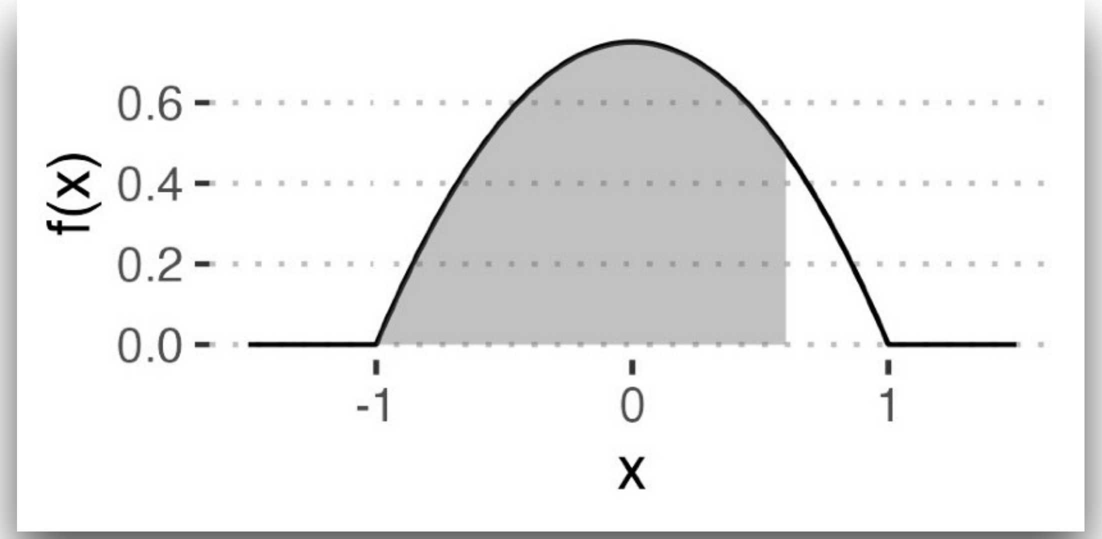
c) Bestem sannsynlighetene $P(X \leq 0.6)$ og $P(X \leq 0.8 \,|\, X > 0.6)$.

$$F(x) = P(X \leq x)$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$

$$\boxed{P(a < X < b) = F(b) - F(a)}$$

Betinget sannsynlighet:
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$
Multiplikasjonssetningen:
$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$



Oppgave 4

La X og Y være diskrete stokastiske variabler med punktsannsynlighet gitt ved:

x\y	y = 0	y = 1
x = 1	0.1	0.2
x = 2	0.3	0.15
x = 3	0.15	0.1

a) Hva er $P(X = 1)$ og $P(X > Y + 1)$?

b) Hva er marginalfordelingene til X og Y?

c) Er X og Y uavhengige?

$$f_X(x) = P(X = x) = P\left(\bigcup_y (X = x, Y = y)\right) = \sum_y P(X = x, Y = y) = \sum_y f_{XY}(x, y)$$

$$f_Y(y) = P(Y = y) = P\left(\bigcup_x (X = x, Y = y)\right) = \sum_x P(X = x, Y = y) = \sum_x f_{XY}(x, y)$$

Definisjon (Uavhengige stokastiske variabler)

To stokastiske variabler X og Y er uavhengige hvis og bare hvis

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \quad \textit{for alle} \quad (x, y).$$

Ukas forelesninger er ferdige!