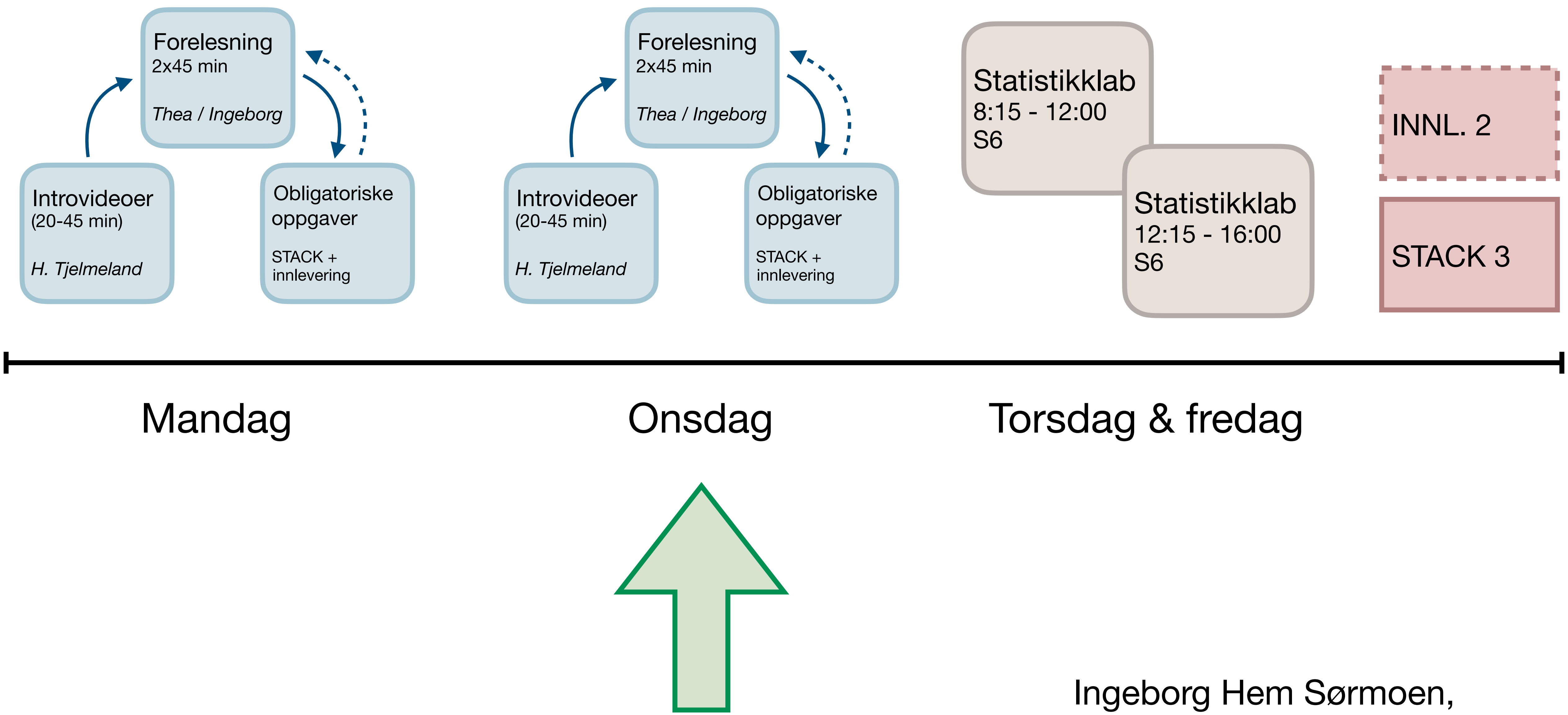
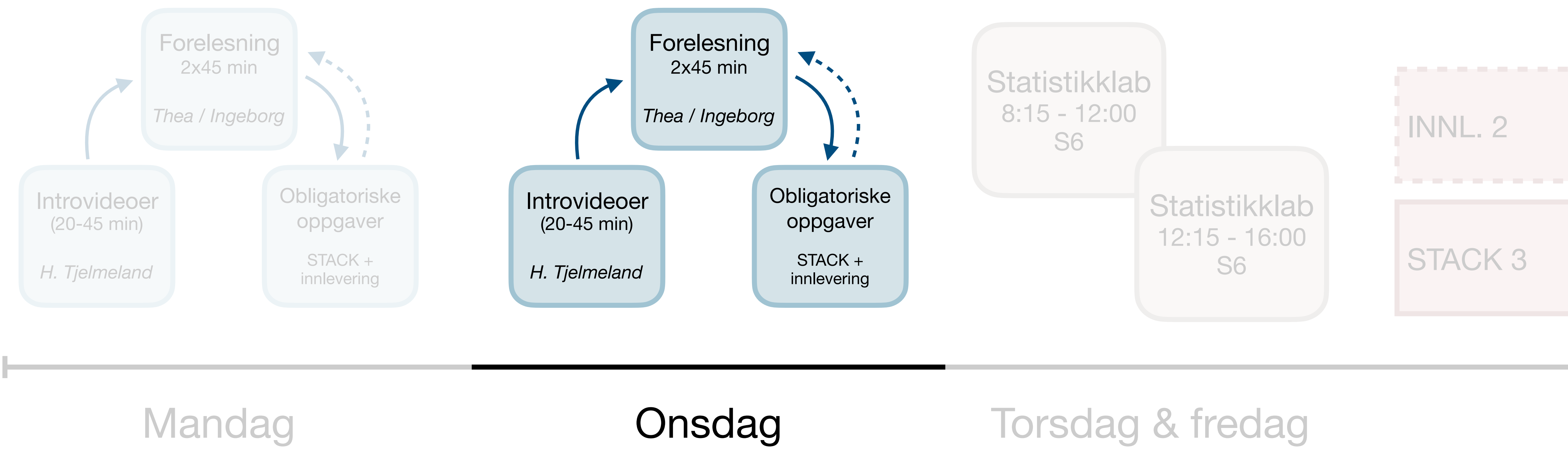
TMA4245 Statistikk

Uke 4 - onsdag



Ingeborg Hem Sørmoen,
Institutt for matematiske fag, NTNU

Uke 4 (mandag 22. januar - fredag 26. januar)



Introvideoer

Forventningsverdi, varians og standardavvik

TMA4240/TMA4245 Statistikk

Håkon Tjelmeland
Institutt for matematiske fag
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

Forventningsverdi av funksjoner av stokastiske variabler

TMA4240/TMA4245 Statistikk

Håkon Tjelmeland
Institutt for matematiske fag
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

Oppgaver

STACK 3: Oppg. 3-6
INNL. 2: Oppg. 2 og 4

Referansegruppe?

Send epost til:

Faglærere:

- Thea Bjørnland (thea.bjornland@ntnu.no)
- Ingeborg Hem Sørmoen (ingeborg.hem@ntnu.no)

I dag

Forventningsverdi
Varians
Standardavvik

Forventningsverdi av funksjoner av stokastiske variabler

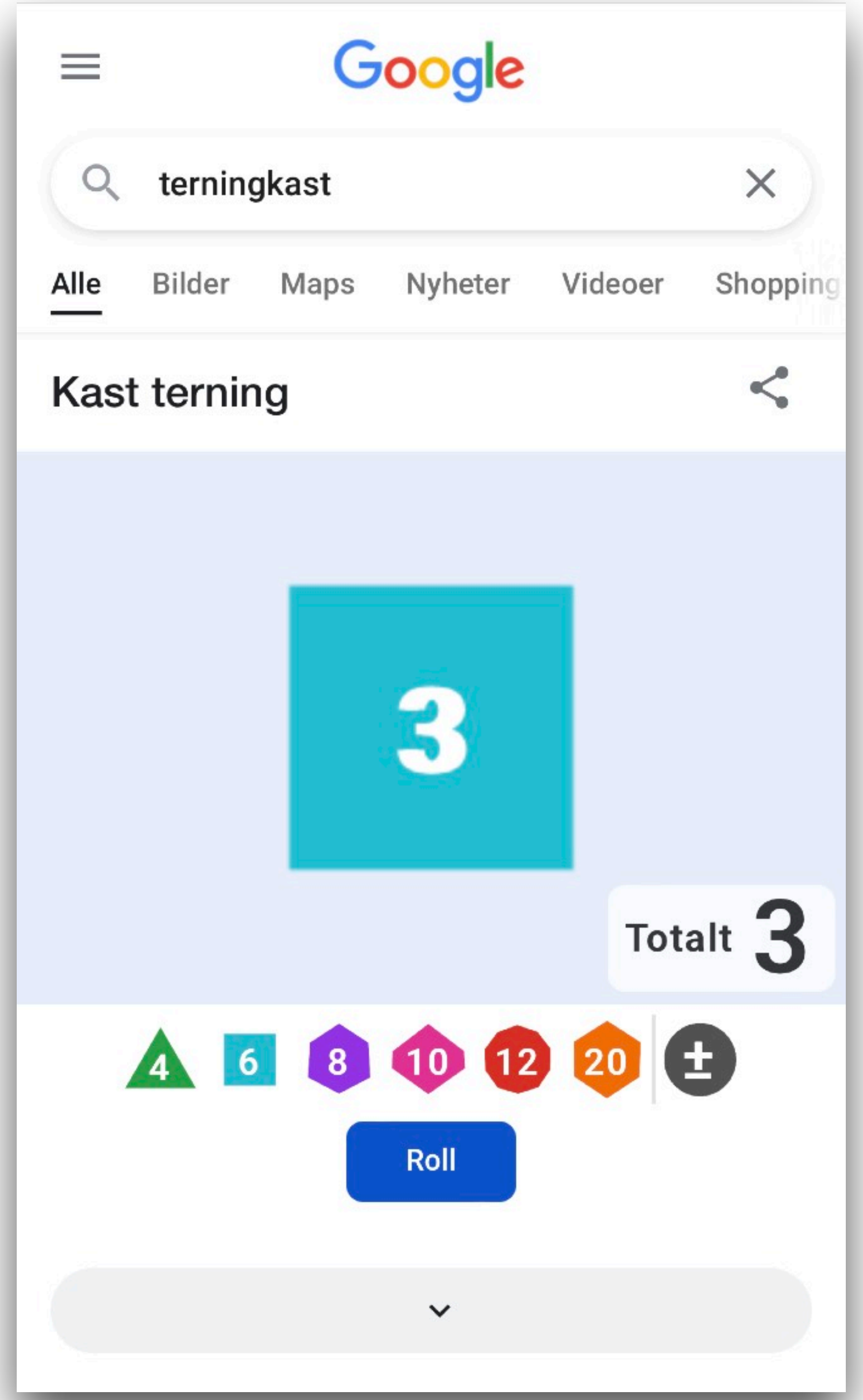
Forrige uke: Stokastisk variabel X,
med sannsynlighetstetthet $f(x)$ og
kumulativ fordeling $F(x)$

Nå: Flere egenskaper ved stokastiske variabler!
Forventningsverdi $E(X)$
Varians $Var(X)$
Standardavvik $SD(X)$

Oppgave 1: Terningkast

- Google “terningkast”, eller gå inn på https://g.co/kgs/bpQ9GCw
- Alle kaster en 6-sidet terning
- **Husk** hva du kastet, og registrer det i mentimeter veldig snart

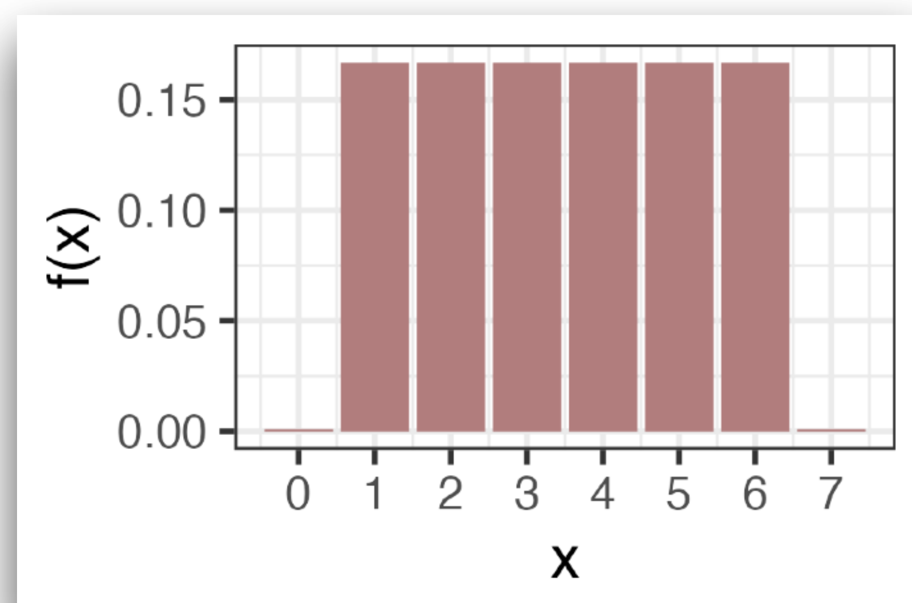
Gå til www.menti.com

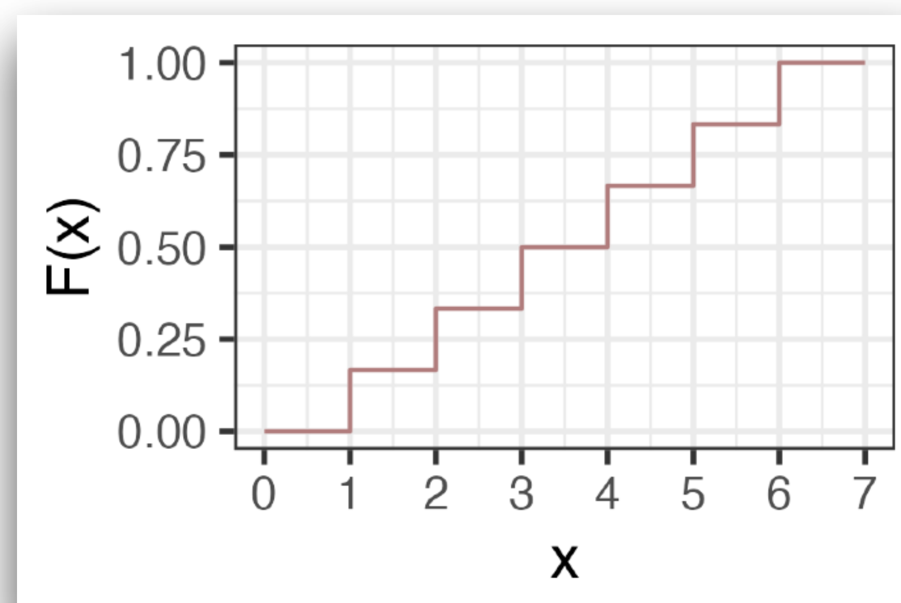


Oppgave 1: Terningkast

Litt repetisjon fra forrige uke:

- Stokastisk forsøk: Vi kaster en terning
- Utfallsrom $S = \{$terningen viser 1, 2, 3, 4, 5, 6$\}$
- Diskret og endelig (og tellbar) stokastisk variabel X
- $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $P(X = x) = f(x) = 1/6$ for alle $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$





Definisjon (Forventningsverdi)

La X være en stokastisk variabel med sannsynlighetsfordeling $f(x)$. Hvis X er en diskret stokastisk variabel er forventningsverdien til X gitt som

$$\mu = \mu_X = E[X] = \sum_x x \cdot f(x)$$

der summer er over alle mulige verdier for x. Hvis X er en kontinuerlig stokastisk variabel er forventningsverdien til X gitt som

$$\mu = \mu_X = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx.$$

$P(X = x) = f(x) = 1/6$
for alle
$x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- ⋆ Tolkning 1: Gjennomsnitt av uendelig mange realisasjoner
- ⋆ Tolkning 2: Tyngdepunkt

Definisjon (Varians)

Variansen til en stokastisk variabel X med forventningsverdi $E[X] = \mu$ er

$$\sigma^2 = \sigma_X^2 = Var[X] = E\left[(X - \mu)^2\right].$$

- ⋆ Merk: Hvis X har dimensjon m vil Var$[X]$ ha dimensjon m^2
- ⋆ Trenger også en størrelse med samme dimensjon som X

Definisjon (Standardavvik)

Standardavviket til en stokastisk variabel X med forventningverdi $E[X] = \mu$ er

$$\sigma = \sigma_X = SD[X] = \sqrt{Var[X]} = \sqrt{E\left[(x - \mu)^2\right]}.$$

- ⋆ Tolkning av standardavvik: Typisk avvik mellom X og μ

⋆ Approksimasjon av $E[X]$ ved stokastisk simulering

- husk tolkning av forventningsverdi: gjennomsnitt av uendelig mange realisasjoner
- anta at vi kan generere uavhengige realisasjoner $x_1, x_2, \ldots, x_n$ fra $f(x)$
- når n er stor (nok) har vi

$$E[X] \approx \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

⋆ Approksimasjon av $\mathrm{Var}[X]$ ved stokastisk simulering

- anta at vi kan generere uavhengige realisasjoner $x_1, x_2, \ldots, x_n$ fra $f(x)$
- når n er stor (nok) har vi

$$\mathrm{Var}[X] \approx \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

- hvorfor skal vi diskutere senere i kurset

Empirisk varians (kommer senere i kurset)

Oppgave 2: Mer terningkast

La oss nå anta at alle kaster terning 3 ganger (med verdi x_1, x_2 og x_3) og registrerer det laveste tallet av de 3 (verdi z).

Eks.:
3, 4, 2 → 2
6, 5, 1 → 1

a) Hvordan kan vi skrive z som en funksjon av $x_i,\ i = 1,2,3$?

b) Hvordan tror du $f_Z(z)$ ser ut?

c) Hva er $E(Z)$? Hva er $f_Z(z)$ og $F_Z(z)$?

La $X \sim f_X(x)$, og la $Z = g(X)$ for en funksjon $g(x)$. Hvis X er en diskret stokastisk variabel har vi da at

$$E[Z] = E[g(X)] = \sum_x g(x) f_X(x),$$

og hvis X er en kontinuerlig stokastisk variabel har vi

$$E[Z] = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx.$$

$$\text{Diskret:} \quad \mathrm{Var}[g(X)] = \sum_x h(x) f_X(x) = \sum_x (g(x) - \mu_{g(X)})^2 f_X(x)$$

$$\text{Kontinuerlig:} \quad \mathrm{Var}[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_{g(X)})^2 f_X(x) dx$$

Har allerede sett $g(x) = x^2$ da vi regnet ut varians!

$$\mu_{g(X)} = E[g(X)] \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} g(x_i) = \overline{g(x)}$$

$$\sigma^2_{g(X)} = \mathrm{Var}[g(X)] \approx \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (g(x_i) - \overline{g(x)})^2$$

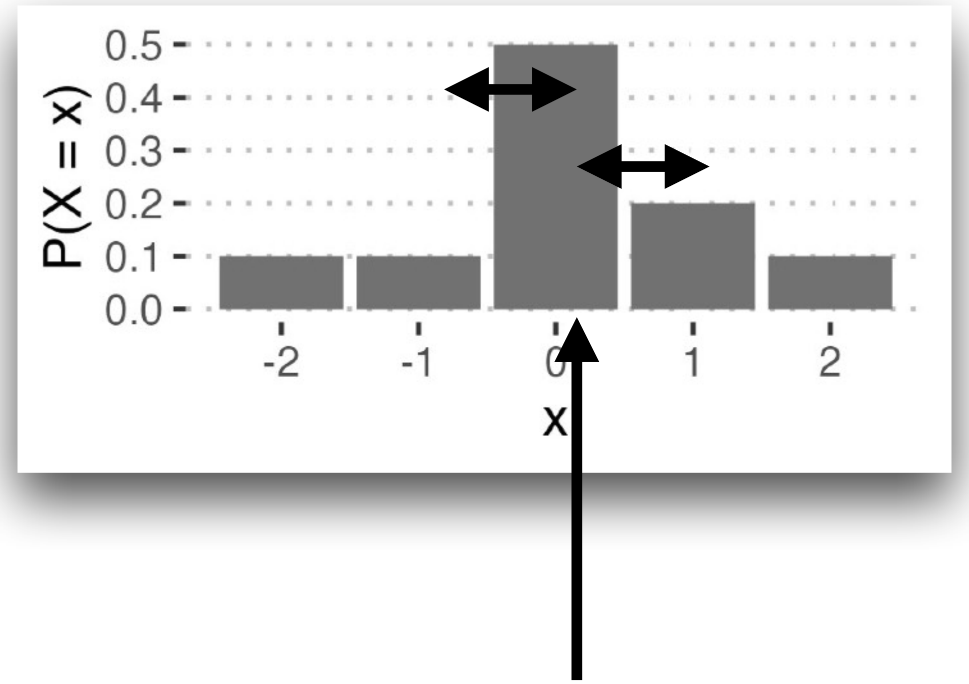
Diskret: $E(X) = \sum_x x f(x)$

Oppgave 3

$Var(X) = E((X - \mu)^2)$

La X være en diskret fordelt stokastisk variabel med utfallsrom $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Punktsannsynlighetene for hvert utfall er gitt ved følgende tabell:

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	0.1	0.1	0.5	0.2	0.1



a) Hva er forventningsverdien?

b) Hva er variansen?

Kontinuerlig:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

$$Var(X) = E((X-\mu)^2)$$

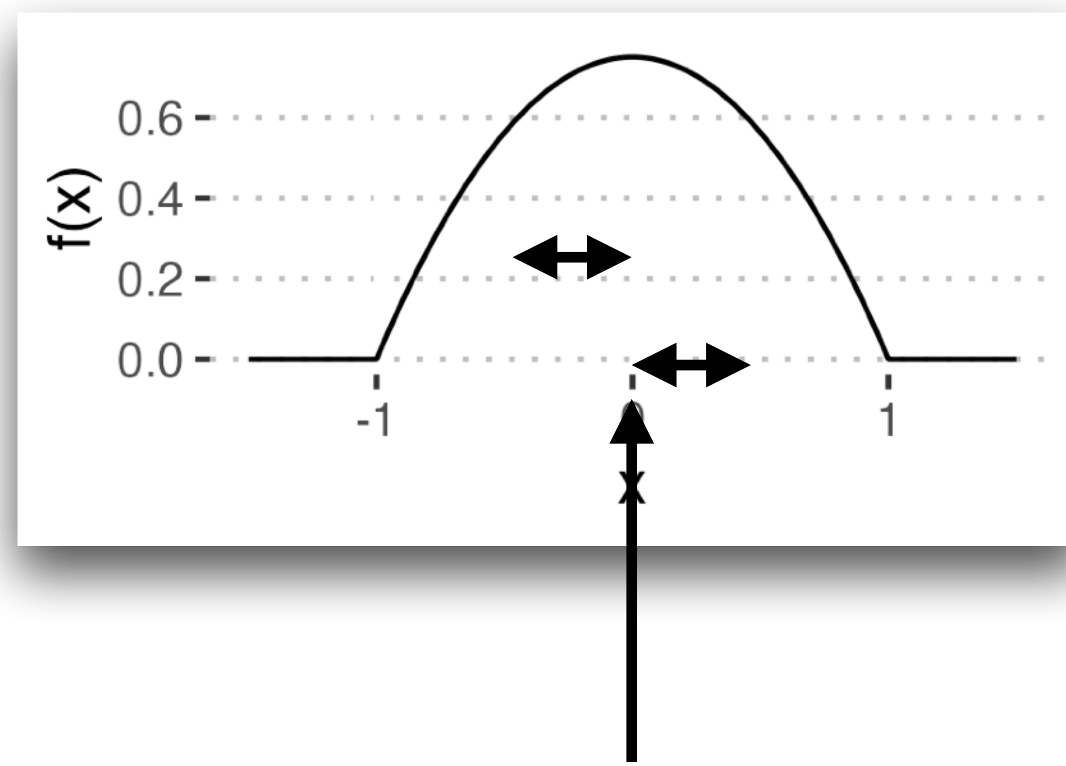
Oppgave 4

La X være en kontinuerlig stokastisk variabel med sannsynlighetstetthet

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1-x^2), & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$$

a) Hva er forventningsverdien?

b) Hva er variansen?



Oppgave 5

X er en stokastisk variabel med følgende sannsynlighetstetthet:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha\beta x^{\beta-1} e^{-\alpha x^{\beta}}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$$

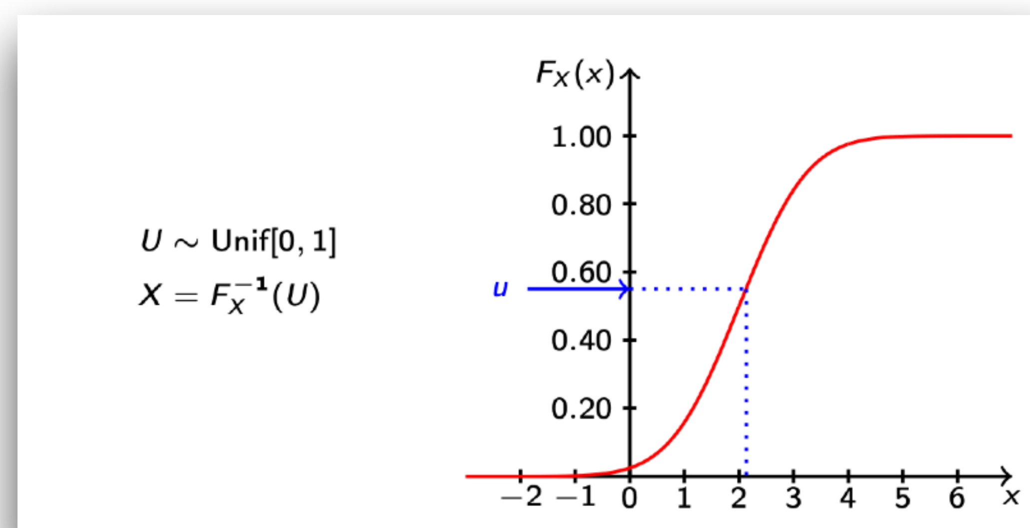
a) Hva er $F(x)$?

b) Bruk stokastisk simulering for å approksimere $E(X)$ og $Var(X)$ for $\alpha = 1.7$ og $\beta = 1.5$.

c) Hva er $E(g(X))$ når $g(x) = x^2 + 1$?

– kontinuerlig SV:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$



Ukas forelesninger er ferdige!

Oppgaver

STACK 3: Hele
INNL. 2: Oppg. 1-4

Torsdag

Statistikklab
8:15 - 12:00 S6

Fredag

Statistikklab
12:15 - 16:00 S6

INNL.

Frist neste uke

STACK

Frist 18:00

Torsdag & fredag