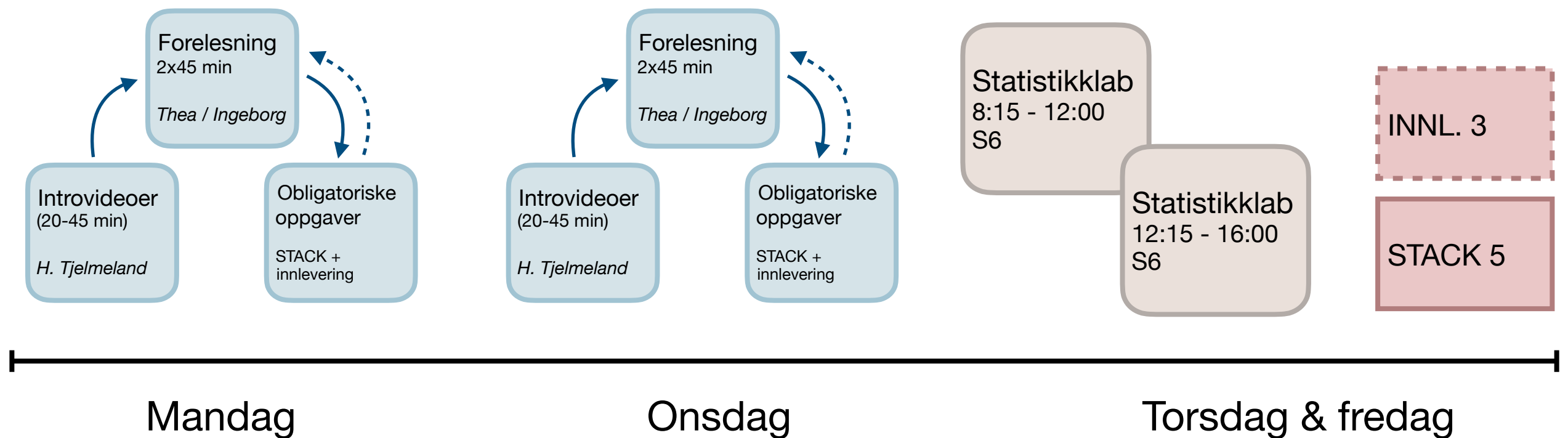
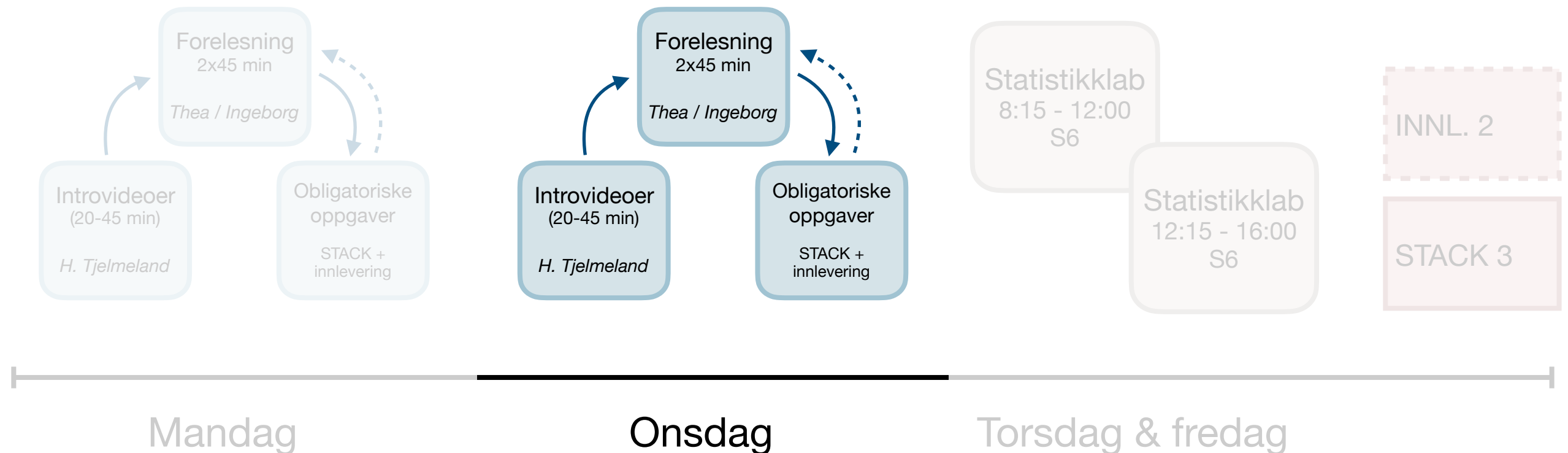


TMA4245 Statistikk

Uke 7 - onsdag



Uke 6 (mandag 12. feb - fredag 16. feb)



Introvideoer

Transformasjon av stokastisk variabel

TMA4240/TMA4245 Statistikk

Håkon Tjelmeland

Institutt for matematiske fag

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

Feilforplantningsformelen

TMA4240/TMA4245 Statistikk

Håkon Tjelmeland

Institutt for matematiske fag

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

Oppgaver

STACK 6: Oppg. 4-6

INNLL. 3: Oppg. 4

Del 1: Transformasjoner

Transformasjon av stokastisk variabel

TMA4240/TMA4245 Statistikk

Håkon Tjelmeland

Institutt for matematiske fag

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

Opppg. 1: Transformasjon av diskret stokastisk variabel

Terningspill: Du kaster en vanlig terning. Dersom du får et partall antall øyne beholder du dette tallet, men dersom du får oddetall skal du gange med to.

- a) Hva blir punktsannsynlighetene til de mulige poengene i dette spillet?
- b) Og hva blir forventet poengsum?

Opppg. 2: Transformasjon av kontinuerlig stokastisk variabel

Repetisjon fra uke 4 om stokastisk simulering:

```
import numpy as np

def simY(n, phi):
    u = np.random.uniform(size=n)
    y = phi * np.sqrt(u)

    return y
```

Figur 1: Python-funksjon som genererer n uavhengige realisasjoner av en kontinuerlig stokastisk variabel Y , der ϕ (φ) er en parameter i sannsynlighetsfordelingen til Y .

Hva blir $f_Y(y)$?

Opppg. 2: Transformasjon av kontinuerlig stokastisk variabel

Repetisjon fra uke 4 om stokastisk simulering:

$$P(Y \leq y) = P(\phi \sqrt{U} \leq y)$$

$$= P(\sqrt{U} \leq \frac{y}{\phi})$$

$$= P(U \leq (\frac{y}{\phi})^2)$$

supertriks for
uniform(0,1)

$$= \frac{y^2}{\phi^2}$$

for $0 \leq y \leq \phi$

Husk $P(U \leq u) = u$

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} \frac{y^2}{\phi^2} = \frac{2y}{\phi^2}$$

Opppg. 2: Transformasjon av kontinuerlig stokastisk variabel, strengt monoton transformasjon

Teorem (Transformasjonsformelen)

Anta at X er en kontinuerlig stokastisk variabel med sannsynlighetstetthet $f_X(x)$, og la $Y = u(X)$ der $u(x)$ er en strengt monoton funksjon. Sannsynlighetstettheten til Y er da gitt ved

$$f_Y(y) = f_X(w(y)) \cdot |w'(y)|,$$

der $w(y)$ er den inverse funksjonen til $u(x)$, dvs $y = u(x) \Leftrightarrow x = w(y)$.

Del 2: Feilforplantning

Feilforplantningsformelen

★ Situasjon:

- har flere uavhengige stokastiske variabler: X, Y, Z
- er interessert i en funksjon av disse

$$V = g(X, Y, Z)$$

- ønsker å approksimere $E[V]$ og $\text{Var}[V]$

★ Bruker Taylors formel for rekkeutvikling av $g(x, y, z)$

- rekkeutvikler x om $\mu_X = E[X]$, y om $\mu_Y = E[Y]$, og z om $\mu_Z = E[Z]$
- approksimerer ved kun å ta med opp til første ordens ledd

$$\begin{aligned} g(x, y, z) &\approx g(\mu_X, \mu_Y, \mu_Z) + \frac{\partial g}{\partial x}(\mu_X, \mu_Y, \mu_Z) \cdot (x - \mu_X) \\ &\quad + \frac{\partial g}{\partial y}(\mu_X, \mu_Y, \mu_Z) \cdot (y - \mu_Y) + \frac{\partial g}{\partial z}(\mu_X, \mu_Y, \mu_Z) \cdot (z - \mu_Z) \end{aligned}$$

★ Får dermed at

$$E[V] = E[g(X, Y, Z)] \approx g(\mu_X, \mu_Y, \mu_Z)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[V] = \text{Var}[g(X, Y, Z)] &\approx \left(\frac{\partial g}{\partial x}(\mu_X, \mu_Y, \mu_Z) \right)^2 \text{Var}[X] + \left(\frac{\partial g}{\partial y}(\mu_X, \mu_Y, \mu_Z) \right)^2 \text{Var}[Y] \\ &\quad + \left(\frac{\partial g}{\partial z}(\mu_X, \mu_Y, \mu_Z) \right)^2 \text{Var}[Z] \end{aligned}$$

★ Den siste av disse formlene kalles (Gauss) feilforplantningsformel

Opppg. 3: Feilforplantning

En ball triller med hastighet h meter per sekund. Ballen veier m kg. Ballens bevegelsesenergi (kinetisk energi) er da:

$$y = 0.5mh^2$$

Vi har et måleinstrument for å måle hastigheten til ballen, men målingene er forbundet med usikkerhet. La H betegne målingen av hastighet med instrumentet. Anta at $SD(H) = 0.5$ m/s, og at det ikke er noen systematiske feil.

Ballens vekt må også måles med et måleinstrument. La M betegne målingen av vekt med instrumentet. Anta at $SD(M) = 0.01$ kg og se bort ifra systematiske feil.

Vi måler ballens hastighet til 10.8 m/s

Presentasjon av måleresultat: 10.8 m/s $\pm$ 0.5 m/s

Vi måler ballens vekt til 0.45 kg

Presentasjon av måleresultat: 0.45 kg $\pm$ 0.01 kg

Hva blir beregnet kinetisk energi og hvordan presenterer vi dette resultatet?

Del 2: Feilforplantning

Feilforplantningsformelen

★ Situasjon:

- har flere uavhengige stokastiske variabler: X, Y, Z
- er interessert i en funksjon av disse

$$V = g(X, Y, Z)$$

- ønsker å approksimere $E[V]$ og $\text{Var}[V]$

★ Bruker Taylors formel for rekkeutvikling av $g(x, y, z)$

- rekkeutvikler x om $\mu_X = E[X]$, y om $\mu_Y = E[Y]$, og z om $\mu_Z = E[Z]$
- approksimerer ved kun å ta med opp til første ordens ledd

$$\begin{aligned} g(x, y, z) &\approx g(\mu_X, \mu_Y, \mu_Z) + \frac{\partial g}{\partial x}(\mu_X, \mu_Y, \mu_Z) \cdot (x - \mu_X) \\ &\quad + \frac{\partial g}{\partial y}(\mu_X, \mu_Y, \mu_Z) \cdot (y - \mu_Y) + \frac{\partial g}{\partial z}(\mu_X, \mu_Y, \mu_Z) \cdot (z - \mu_Z) \end{aligned}$$

★ Får dermed at

$$E[V] = E[g(X, Y, Z)] \approx g(\mu_X, \mu_Y, \mu_Z)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[V] = \text{Var}[g(X, Y, Z)] &\approx \left(\frac{\partial g}{\partial x}(\mu_X, \mu_Y, \mu_Z) \right)^2 \text{Var}[X] + \left(\frac{\partial g}{\partial y}(\mu_X, \mu_Y, \mu_Z) \right)^2 \text{Var}[Y] \\ &\quad + \left(\frac{\partial g}{\partial z}(\mu_X, \mu_Y, \mu_Z) \right)^2 \text{Var}[Z] \end{aligned}$$

★ Den siste av disse formlene kalles (Gauss) feilforplantningsformel