

Skriftlig innlevering 1, Oppgave 1-8

Oppgave 1 *

For å bestemme matematiske uttrykk for sannsynligheter av hendelser er det ofte enklest å visualisere sannsynligheten for hendelsen som et areal i et venndiagram. Start med å overbevise deg selv om at $P(A') = 1 - P(A)$ og at $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ for hendelser A og B i et utfallsrom S ved hjelp av venndiagram. Vis deretter at følgende sannsynligheter er like

$$\begin{aligned}P((A \cup B)') &= P(A' \cap B'), \\P((A \cap B)') &= P(A' \cup B').\end{aligned}$$

Tips: tegn og skravér i ett venndiagram for hver side av likhetstegnet.

Oppgave 2 *

Anta at vi har en urne med 34 kuler. Av disse 34 kulene er sju kuler røde og resten blå. Anta at vi tilfeldig trekker ut sju av de 34 kulene, uten tilbakelegging.

- Hva er sannsynligheten for at alle de sju kulene vi trekker ut er røde?
- Hva er sannsynligheten for at nøyaktig fire av de sju kulene vi trekker ut er røde?

Anta så at vi etter å ha trukket ut sju kuler fra urna, trekker ut enda ei kule tilfeldig blant de 27 kulene som er igjen i urna. Denne siste kula kaller vi ekstrakule.

- Hva er sannsynligheten for at nøyaktig seks av de sju kulene vi først trakk ut er røde og at også ekstrakula er rød?

Oppgave 3 *

I et lotteri er det 300 lodd. Tre av loddene gir en gevinst av type A og tre andre lodd gir en gevinst av type B . De ørige 294 loddene gir ingen gevinst. Ola kjøper fem lodd som han trekker tilfeldig blant de 300 loddene.

- Hva er sannsynligheten for at Ola vinner nøyaktig en gevinst av type A ?
- Hva er sannsynligheten for at Ola vinner minst en gevinst av type A ?
- Hva er sannsynligheten for at Ola vinner (minst en gevinst)?

Oppgave 4

La A , B og C være hendelser i et utfallsrom S , med $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.3$, $P(C) = 0.3$, $P(A \cup B) = 0.6$, $P(A \cup C) = 0.5$, $P(B \cup C) = 0.6$ og $P(A \cup B \cup C) = 0.7$.

- Finn sannsynlighetene $P(A \cap B)$, $P(A \cap B \cap C)$ og $P(A|B)$.
- Er hendelsene A og B uavhengige?
- Er hendelsene A og B disjunkte?

Oppgave 5

I en befolkning er 8% av mennene og 0.3% av kvinnene fargeblinde. I en gruppe personer fra denne befolkningen er det dobbelt så mange kvinner som menn. En person som trekkes tilfeldig fra denne gruppen viser seg å være fargeblind.

- Hva er sannsynligheten for at denne personen er ei kvinne?

Oppgave 6

La X være en diskret fordelt stokastisk variabel med punktsannsynlighet $f(x) = P(X = x)$ som angitt i følgende tabell.

x	$f(x)$
0	0.05
1	0.10
2	0.25
3	0.40
4	0.15
5	0.05

- Kjør python-koden under for å generere et stolpediagram for $f(x)$. Merk: Studer hvilke funksjoner som benyttes slik at du kan skrive lignende kode selv senere.

```
In [ ]: #UTLEVERT KODE (ingenting her skal endres)
```

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

#utfallsrom
x=np.arange(6)
#punktsannsynlighet
f_x = np.array([0.05,0.10,0.25,0.40,0.15,0.05])
#stolpediagram
plt.bar(x, f_x)
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("f(x)")
plt.title("Stolpediagram for f(x)")
plt.show()
```

- Bestem sannsynlighetene $P(X \leq 2)$, $P(X \leq 2|X < 4)$ og $P(X \leq 2|X \geq 1)$.
- Finn kumulativ fordelingsfunksjon for X , $F(x) = P(X \leq x)$. (Husk at $F(x)$ er definert for alle $x \in \mathbb{R}$.)
- Kjør python-koden under for å generere et plott av $F(x)$. Merk: Studer hvilke funksjoner som benyttes slik at du kan skrive lignende kode selv senere.

```
In [ ]: #UTLEVERT KODE (ingenting her skal endres)
```

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# sett x-verdier og beregn tilhørende F(x)
x = [-1,0]
F_x = [0,0] # start- og sluttverdi for x på intervallet [-1,0]

for i in range(5+1): # for-løkke over verdiene 0,1,2,3,4,5
    x = x + [i,i+1] # "+" legger her listene sammen til en lengre liste
    FF = np.sum(f_x[np.arange(i+1)]) # verdien til F(i)
    F_x = F_x + [FF,FF]

# lag plott av F(x)
plt.plot(x, F_x, color="red")
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("F(x)")
plt.show()
```

Oppgave 7

La X være en stokastisk variabel som beskriver hvor lang tid en komponent har fungert i det den svikter. Vi kaller da X for *levetiden* for komponenten.

Levetiden X (målt i antall år) til en bestemt type mekaniske komponenter har vist seg å følge en fordeling med kumulativ fordelingsfunksjon gitt ved

$$F_X(x) = 1 - \exp\left\{-\frac{x^2}{\alpha}\right\}; x \geq 0,$$

der α er en parameter som beskriver kvaliteten til komponentene.

Deloppgave a)

Kjør python-koden under for å generere et plott av $F_X(x)$ når $\alpha = 1$. *Merk: Studer koden slik at du kan skrive lignende kode selv senere.*

```
In [ ]: #UTLEVERT KODE (ingenting her skal endres)

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Sett hvilke x-verdier du vil plotte for
x = np.linspace(0,5,100)

# Sett verdien for parameteren alpha
alpha = 1

# Beregn kumulativ fordelingsfunksjon
def F_X(x, alpha):
    return 1 - np.exp(-x**2/alpha)

plt.plot(x, F_X(x, alpha), color="red")
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("F(x)")
plt.show()
```

- Finn en formel for sannsynlighetstettheten $f_X(x)$ til X .
- Skriv python-kode som genererer et plott av $f_X(x)$ for $x \in (0, 5)$. Skriv koden slik at du enkelt kan lage plott for ulike verdier av parameteren α , tilsvarende som er gjort i koden over for å plote $F_X(x)$.

```
In [ ]: import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Sett hvilke x-verdier du vil plotte for
x = np.linspace(0,5,100)

# Sett verdien for parameteren alpha
alpha = 1

# Beregn så sannsynlighetstettheten og plott opp funksjonen
```

Her er deloppgave a slutt.

Et instrument inneholder to komponenter av denne typen, begge med samme kvalitetsparameter α . De to komponentene svikter uavhengig av hverandre, og instrumentet fungerer så lenge minst en av de to komponentene fungerer. La Z betegne levetiden til instrumentet.

Deloppgave b)

- Finn en formel for sannsynligheten for at instrumentet fremdeles fungerer etter en tid z , dvs. $1 - F_Z(z) = P(Z > z)$.
- Bestem sannsynlighetstettheten for Z , $f_Z(z)$.
- Der hvor du over skrev python-kode for å plote $f_X(x)$, legg til python-kode for også å generere et plott av $f_Z(z)$. Inkluder plottet av $f_Z(z)$ i samme plott som $f_X(x)$, slik at du enkelt kan sammenligne de to sannsynlighetstetthetene. Kan du intuitivt forstå/forklare den kvalitative forskjellen mellom de to sannsynlighetstetthetene?

Oppgave 8

I et lotteri er det 300 lodd. Tre av loddene gir en gevinst av type A og tre andre lodd gir en gevinst av type B . De øvrige 294 loddene gir ingen gevinst. Ola kjøper fem lodd som han trekker tilfeldig blant de 300 loddene. La X betegne antall gevinster av type A som Ola vinner, og la Y betegne antall gevinster han vinner av type B .

La $f_X(x) = P(X = x)$ betegne punktsannsynligheten for X , og la tilsvarende $f_Y(y) = P(Y = y)$ betegne punktsannsynligheten for Y . Simultan punktsannsynlighet for X og Y betegner vi med $f_{XY}(x, y) = P(X = x, Y = y)$.

- Benytt kombinatorikk-regler til å finne en formel for $f_X(x)$ som funksjon av $x = 0, 1, 2, 3$.
- Finn også en formel som gjelder for $f_{XY}(x, y)$ når $x, y \in \{0, 1, 2, 3\}$, $x + y \leq 5$.

For å besvare neste spørsmål kan du benytte at vi generelt har sammenhengen

$$f_X(x) = \sum_y f_{XY}(x, y),$$

der summen er over alle mulige verdier for y .

- Utled fra $f_{XY}(x, y)$ en formel for marginalfordelingen for $f_X(x)$ og observer at denne er identisk med formelen du fant over. *Hint: Du vil her få bruk for Vandermondes identitet, som sier at for alle ikke-negative heltall r , m og n har man at*

$$\sum_{k=0}^r \binom{m}{k} \binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}.$$

Fasit:

- Oppgave 2: 0.0190, $1.30 \cdot 10^{-6}$
- Oppgave 3: 0.0487, 0.0493, 0.0967
- Oppgave 4: 0.1, 0, $1/3$
- Oppgave 5: 0.0698
- Oppgave 6: 0.40, 0.5, 0.368