

Innlevering 2, Oppgave 1-6

Oppgave 1 *

La X være en diskret fordelt stokastisk variabel med punktsannsynlighet $f(x) = P(X = x)$ som angitt i følgende tabell.

x	$f(x)$
0	0.05
1	0.10
2	0.25
3	0.40
4	0.15
5	0.05

- Finn $P(X \leq 2)$

Python-koden under definerer en funksjon *simX* som genererer n realisasjoner av X . Denne funksjonen kan du benytte til å besvare neste spørsmål. *Merk: Studer koden slik at du senere selv kan skrive pythonfunksjoner.*

```
In [ ]: # Importer nødvendige biblioteker, denne cellen må kjøres før annen kode.  
import numpy as np  
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
In [ ]: # UTLEVERT KODE (ingenting her skal endres)
# punktsannsynlighet
f_x = np.array([0.05,0.10,0.25,0.40,0.15,0.05])

# kumulativ fordelingsfunksjon
F_x = [np.sum(f_x[:i]) for i in range(1,7)]

def simX(n):
    # verdimengde
    x = np.arange(6)
    # for lagring av realisasjoner
    x_sim = np.zeros(n)
    for i in range(n): # vi simulerer hver og en x for seg
        u = np.random.uniform() # en realisasjon fra U(0,1)
        if(u < F_x[0]): # hvis u er mindre enn den laveste
            # verdien i F_x vil
            # vi at realisasjonen skal være 0
            x_sim[i] = x[0]
        elif(u <= F_x[1]): # hvis u er mindre enn den nest
            # laveste verdien (men større enn laveste)
            # vil vi at x skal bli 1
            x_sim[i] = x[1]
        elif(u <= F_x[2]):
            x_sim[i] = x[2]
        elif(u <= F_x[3]):
            x_sim[i] = x[3]
        elif(u <= F_x[4]):
            x_sim[i] = x[4]
        elif(u > F_x[4]):
            x_sim[i] = x[5]
    return x_sim
```

- Skriv python-kode som benytter stokastisk simulering, og spesielt *simX*-funksjonen definert over, til å finne tilnærmet verdi for $P(X \leq 2)$. Benytt for eksempel $n = 1000$ og kjør gjerne koden din flere ganger slik at du får en følelse av nøyaktigheten av tilnærmelsene. Sammenlign verdiene du finner her med den eksakte verdiene du fant over (og i Skriftlig innlevering 1).

```
In [ ]: # Antall realisasjoner man skal bruke
n = 1000

# Simuler realisasjoner av X ved å kalle på simX-funksjonen i cellen over
simulerte_X = ...

# Approksimer sannsynligheten
P_X_le_2 = ...

# Skriv ut resultatet
print("Approksimert sannsynlighet: ",P_X_le_2)
```

Oppgave 2 *

Vi skal igjen studere den diskrete sannsynlighetsfordelingen fra oppgave 1.

- Regn ut forventningsverdien til X , $E[X]$
- Regn ut variansen, $\text{Var}(X)$, og standardavviket, $\text{SD}[X]$.
- Bruk `simX`-funksjonen definert over til å finne tilnærmede verdier for $E[X]$ og $\text{SD}[X]$. Sammenlign tilnærmingene med de eksakte verdiene du regnet ut over. Kjør gjerne simuleringen (f.eks med $n = 1000$ flere ganger).

Oppgave 3 *

La X være en stokastisk variabel som beskriver hvor lang tid en komponent har fungert i det den svikter. Vi kaller da X for *levetiden* for komponenten.

Levetiden X (målt i antall år) til en bestemt type mekaniske komponenter har vist seg å følge en fordeling med kumulativ fordelingsfunksjon gitt ved

$$F_X(x) = 1 - \exp\left\{-\frac{x^2}{\alpha}\right\}; x \geq 0,$$

der α er en parameter som beskriver kvaliteten til komponentene.

Deloppgave a)

- Finn sannsynlighetstettheten til X , $f_X(x)$. Eventuelt hent denne fra din besvarelse av Skriftlig innlevering 1.

Deloppgave b)

La $U \sim \text{Unif}[0, 1]$.

- Finn en formel for hvordan man fra U kan definere X slik at kumulativ fordeling for X blir som angitt over.
- Skriv en python-funksjon som genererer n realisasjoner av X . La funksjonen ha to input-parametre, antall realisasjoner n og verdien til kvalitetsparameteren α . Benytt funksjonen til å generere (for eksempel) $n = 10\,000\,000$ realisasjoner av X med (for eksempel) $\alpha = 1$, og lag et sannsynlighetshistogram for de genererte verdiene. Spesifiser at histogrammet skal ha 100 intervaller, se kode under. Plott også sannsynlighetstettheten $f_X(x)$ i samme plott som sannsynlighetshistogrammet. Ser det ut til at du har generert realisasjoner av X på korrekt måte?

```
In [ ]: def generateX(n,alpha):
    u = np.random.uniform(size=n) #array med n elementer.
    x = ... # fyll inn formelen du fant for x

    return x

# Sett antall realisasjoner og verdien til alpha
n = 10000000
alpha = 1

# simuler realisasjoner av X
simulerte_X = ...

# Lag sannsynlighetshistogram for de simulerte verdiene,
# vi spesifiserer antall intervaller ved å sette "bins=100"
plt.hist(simulerte_X, density=True,bins=100) #density=True gjør at vi får

# Angi navn på aksene

# Regn ut og plott sannsynlighetstettheten til X på samme plott

# Avslutt med å generere alle elementene du har plottet
plt.show()
```

Her er deloppgave b) slutt.

Deloppgave c)

Et instrument inneholder fem komponenter av denne typen, to av disse komponentene har kvalitetsparameter $\alpha = 1$ og de andre tre komponentene har $\alpha = 1.2$. De fem komponentene svikter uavhengig av hverandre og instrumentet fungerer så lenge minst tre av de fem komponentene fungerer. La Y betegne levetiden til instrumentet.

- Skriv en python-funksjon som genererer n realisasjoner av Y . Funksjonen skal ha en input-parameter, nemlig antall realisasjoner n . Benytt funksjonen til å generere (for eksempel) $n = 10\,000$ realisasjoner av Y , og lag et sannsynlighetsistogram for de genererte verdiene.
- Benytt python-funksjonen til å finne tilnærmede verdier for $P(Y \geq 1)$ og $P(Y \geq 1 | Y \geq 0.75)$.

```
In [ ]: # definer funksjonen og benytt denne som angitt i oppgaven
```

Oppgave 4 *

Vi skal igjen studere levetidsfordelingen fra Oppgave 3.

- Finn en formel for $E[X]$ (som funksjon av α). Du kan her uten bevis benytte at

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Du kan verifisere om resultatet virker rimelig ved å sammenlikne med histogrammet fra oppgave 3.

- Benytt python-funksjonen du har implementert i oppgave 3 c til å finne tilnærmede verdier for $E[Y]$ og $SD[Y]$.

Oppgave 5

Simultanfordelingen $f_{XY}(x, y)$ til to diskret fordelte stokastiske variabler X og Y er gitt ved følgende tabell.

	$y = 0$	$y = 1$	$y = 2$	$y = 3$
$x = 0$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
$x = 1$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{18}$
$x = 2$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{6}$

- Finn marginalfordelingen for X , dvs $f_X(x)$, og den betingede fordelingen for Y gitt X , dvs $f_{Y|X}(y|x)$.
- Finn forventningsverdien for X , $E[X]$, og forventningsverdien til Y , $E[Y]$.
- Er X og Y uavhengige stokastiske variabler? Begrunn svaret.
- Finn $\text{Cov}[X, Y]$.

Oppgave 6

En maskin produserer aluminiumsplater som ifølge produktspesifikasjonen skal veie 100 gram. Det blir akseptert et lite avvik fra denne vekten, men dersom vekten avviker mer enn ± 1 gram fra denne verdien, blir aluminiumsplaten vurdert til å være defekt.

Anta at vekten på aluminiumsplatene som produseres har forventning 100 gram og standardavvik 0.8 gram.

Deloppgave a)

Ti plater pakkes i en pappeske. Pappesken veier 50 gram. Platenes vekt er uavhengige.

- Hva er forventet vekt av pappesken med ti tilfeldig valgte plater?
- Hva er standarddeviasjonen?

Deloppgave b)

Sannsynligheten for at en aluminiumsplate ikke følger spesifikasjonen er 0.21. Vi ser som før på en eske med ti tilfeldig valgte plater.

- Hva er forventet antall defekte plater i esken?
- Hva er sannsynligheten for at minst en plate er defekt?

Fasit:

- Oppgave 1: 0.40
- Oppgave 2: $E[X] = 2.65$, $\text{Var}[X] = 1.3275$
- Oppgave 5: $E[X] = 1$, $E[Y] = 5/3$, $\text{Cov}[X, Y] = 2/9$
- Oppgave 6a): 1050, 2.53
- Oppgave 6b): 2.1, 0.905