

Det er noen små ~~st~~feil i
pdf-fila videoen er basert på.

Denne pdf-en påpeker/korrigerer
feilene.

Merk at original pdf og video
IKKE er endret.

Forventningsverdi og varians til lineære funksjoner

TMA4240/TMA4245 Statistikk

Håkon Tjelmeland

Institutt for matematiske fag

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

Forventningsverdi av lineære funksjoner

Kontinuerlige stokastiske variabler:

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dx$$

$$E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y)f_{XY}(x, y)dx$$

- ★ La X og Y være SV, la a og b være konstanter
- ★ Skal utlede formler for

$$E[aX] = aE[X]$$

$$E[b] =$$

$$E[X + Y] =$$

$$\begin{aligned} E[aX] &= \int_{-\infty}^{\infty} axf_X(x)dx \\ &= a \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx \\ &= aE[X] \end{aligned}$$

Forventningsverdi av lineære funksjoner

Kontinuerlige stokastiske variabler:

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dx$$

$$E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y)f_{XY}(x, y)dx$$

- ★ La X og Y være SV, la a og b være konstanter
- ★ Skal utlede formler for

$$E[aX] = aE[X]$$

$$E[b] = b$$

$$E[X + Y] =$$

$$\begin{aligned} E[b] &= \int_{-\infty}^{\infty} bf_X(x)dx \\ &= b \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx \\ &= b \end{aligned}$$

Forventningsverdi av lineære funksjoner

Kontinuerlige stokastiske variabler:

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$$

$$E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f_{XY}(x, y) dx dy$$

- ★ La X og Y være SV, la a og b være konstanter
- ★ Skal utlede formler for

$$E[aX] = aE[X]$$

$$E[b] = b$$

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y]$$

$$\begin{aligned} E[X + Y] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x + y) f_{XY}(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x f_{XY}(x, y) + y f_{XY}(x, y)) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f_{XY}(x, y) dx dy + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y f_{XY}(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f_{XY}(x, y) dy dx + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y f_{XY}(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[x \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy \right] dx + \int_{-\infty}^{\infty} \left[y \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx \right] dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy \\ &= E[X] + E[Y] \end{aligned}$$

Forventningsverdi av lineære funksjoner

Kontinuerlige stokastiske variabler:

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dx$$

$$E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y)f_{XY}(x, y)dx$$

- ★ La X og Y være SV, la a og b være konstanter
- ★ Skal utlede formler for

$$\begin{aligned}E[aX] &= aE[X] \\E[b] &= b \\E[X + Y] &= E[X] + E[Y]\end{aligned}$$

- ★ Merk: Den siste regneregelen kan generaliseres til en sum av flere enn to SV

$$E[X + Y + Z] = E[X + (Y + Z)] = E[X] + E[Y + Z] = E[X] + E[Y] + E[Z]$$

$$E[X_1 + X_2 + \dots + X_n] = E[X_1] + E[X_2] + \dots + E[X_n]$$

$$E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n E[X_i]$$

Forventningsverdi av lineære funksjoner

Kontinuerlige stokastiske variabler:

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dx$$

$$E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y)f_{XY}(x, y)dx$$

- ★ La X og Y være SV, la a og b være konstanter
- ★ Skal utlede formler for

$$E[aX] = aE[X]$$

$$E[b] = b$$

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y]$$

- ★ Et eksempel på bruk av regnereglene

$$\begin{aligned} E[4X - 6Y + 2] &= E[4X + (-6)Y + 2] \\ &= E[4X] + E[(-6)Y] + E[2] \\ &= 4E[X] + (-6)E[Y] + 2 \\ &= 4E[X] - 6E[Y] + 2 \end{aligned}$$

Varians for lineære funksjoner

$$E[aX] = aE[X]$$

$$E[b] = b$$

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y]$$

$$\text{Var}[X] = E[(X - \mu_X)^2]$$

- ★ La X og Y være SV, la a og b være konstanter
- ★ Skal utlede formler for

$$\text{Var}[aX] = a^2 \text{Var}[X]$$

$$\text{Var}[b] =$$

$$\text{Var}[X + Y] =$$

$$\begin{aligned}\text{Var}[aX] &= E[(aX - \mu_{aX})^2] \\ &= E[(aX - a\mu_X)^2] \\ &= E[a^2(X - \mu_X)^2] \\ &= a^2 E[(X - \mu_X)^2] \\ &= a^2 \text{Var}[X]\end{aligned}$$

Varians for lineære funksjoner

$$E[aX] = aE[X]$$

$$E[b] = b$$

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y]$$

$$\text{Var}[X] = E[(X - \mu_X)^2]$$

- ★ La X og Y være SV, la a og b være konstanter
- ★ Skal utlede formler for

$$\text{Var}[aX] = a^2 \text{Var}[X]$$

$$\text{Var}[b] = 0$$

$$\text{Var}[X + Y] =$$

$$\text{Var}[b] = E[(b - \mu_b)^2]$$

$$= E[(b - b)^2]$$

$$= E[0]$$

$$= 0$$

Varians for lineære funksjoner

$$E[aX] = aE[X]$$

$$E[b] = b$$

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y]$$

$$\text{Var}[X] = E[(X - \mu_X)^2]$$

★ La X og Y være SV, la a og b være konstanter

★ Skal utlede formler for

$$\text{Var}[aX] = a^2 \text{Var}[X]$$

$$\text{Var}[b] = 0$$

$$\text{Var}[X + Y] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y] + 2\text{Cov}[X, Y]$$

$$\begin{aligned}\text{Var}[X + Y] &= E[((X + Y) - \mu_{X+Y})^2] \\&= E[((X + Y) - (\mu_X + \mu_Y))^2] \\&= E[((X - \mu_X) + (Y - \mu_Y))^2] \\&= E[(X - \mu_X)^2 + 2(X - \mu_X)(Y - \mu_Y) + (Y - \mu_Y)^2] \\&= E[(X - \mu_X)^2] + E[2(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] + E[(Y - \mu_Y)^2] \\&= \text{Var}[X] + 2E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] + \text{Var}[Y] \\&= \text{Var}[X] + \text{Var}[Y] + 2\text{Cov}[X, Y]\end{aligned}$$

Varians for lineære funksjoner

$$E[aX] = aE[X]$$

$$E[b] = b$$

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y]$$

$$\text{Var}[X] = E[(X - \mu_X)^2]$$

- ★ La X og Y være SV, la a og b være konstanter
- ★ Skal utlede formler for

$$\text{Var}[aX] = a^2 \text{Var}[X]$$

$$\text{Var}[b] = 0$$

$$\text{Var}[X + Y] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y] + 2\text{Cov}[X, Y]$$

- ★ Merk: Den siste regneregelen kan generaliseres til en sum av flere enn to SV

$$\text{Var} \left[\sum_{i=1}^n X_i \right] = \sum_{i=1}^n \text{Var}[X_i] + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} \text{Cov}[X_i, X_j]$$

- ★ Merk: Dersom $X_1, X_2, \dots, X_n$ er uavhengige SV får vi at

$$\text{Var} \left[\sum_{i=1}^n X_i \right] = \sum_{i=1}^n \text{Var}[X_i]$$

Varians for lineære funksjoner

$$E[aX] = aE[X]$$

$$E[b] = b$$

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y]$$

$$\text{Var}[X] = E[(X - \mu_X)^2]$$

- ★ La X og Y være SV, la a og b være konstanter
- ★ Skal utlede formler for

$$\text{Var}[aX] = a^2 \text{Var}[X]$$

$$\text{Var}[b] = 0$$

$$\text{Var}[X + Y] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y] + 2\text{Cov}[X, Y]$$

- ★ Et eksempel på bruk av regnereglene. Anta X og Y uavhengige

$$\begin{aligned}\text{Var}[4X - 6Y + 2] &= \text{Var}[4X + (-6)Y + 2] \\ &= \text{Var}[4X] + \text{Var}[(-6)Y] + \text{Var}[2] \\ &= 4^2 \text{Var}[X] + (-6)^2 \text{Var}[Y] + 0 \\ &= 16\text{Var}[X] + 36\text{Var}[Y]\end{aligned}$$

Oppsummering

- ★ Har funnet regneregler

$$E[aX] = aE[X]$$

$$E[b] = b$$

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y]$$

$$\text{Var}[aX] = a^2 \text{Var}[X]$$

$$\text{Var}[b] = 0$$

$$\text{Var}[X + Y] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y] + 2\text{Cov}[X, Y]$$