

Innlevering 2

Oppgave 1 *

La X være en diskret fordelt stokastisk variabel med punktsannsynlighet $f(x) = P(X = x)$ som angitt i følgende tabell.

x	$f(x)$
0	0.05
1	0.10
2	0.25
3	0.40
4	0.15
5	0.05

- Finn $P(X \leq 2)$

Python-koden under definerer en funksjon *simX* som genererer n realisasjoner av X . Denne funksjonen kan du benytte til å besvare neste spørsmål. *Merk: Studer koden slik at du senere selv kan skrive pythonfunksjoner.*

```
In [ ]: # Importer nødvendige biblioteker, denne cellen må kjøres før annen kode.  
import numpy as np  
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
In [ ]: # UTLEVERT KODE (ingenting her skal endres)  
# punktsannsynlighet  
f_x = np.array([0.05,0.10,0.25,0.40,0.15,0.05])  
  
# kumulativ fordelingsfunksjon  
F_x = [np.sum(f_x[:i]) for i in range(1,7)]  
  
def simX(n):  
    # verdimengde  
    x = np.arange(6)  
    # for lagring av realisasjoner  
    x_sim = np.zeros(n)  
    for i in range(n): # vi simulerer hver og en x for seg  
        u = np.random.uniform() # en realisasjon fra U(0,1)  
        if(u < F_x[0]): # hvis u er mindre enn den laveste  
            # verdien i F_x vil  
            # vi at realisasjonen skal være 0  
            x_sim[i] = x[0]  
        elif(u <= F_x[1]): # hvis u er mindre enn den nest  
            # laveste verdien (men større enn laveste)  
            # vil vi at x skal bli 1
```

```

        x_sim[i] = x[1]
    elif(u <= F_x[2]):
        x_sim[i] = x[2]
    elif(u <= F_x[3]):
        x_sim[i] = x[3]
    elif(u <= F_x[4]):
        x_sim[i] = x[4]
    elif(u > F_x[4]):
        x_sim[i] = x[5]
return x_sim

```

- Skriv python-kode som benytter stokastisk simulering, og spesielt *simX*-funksjonen definert over, til å finne tilnærmet verdi for $P(X \leq 2)$. Benytt for eksempel $n = 1000$ og kjør gjerne koden din flere ganger slik at du får en følelse av nøyaktigheten av tilnærmelsene. Sammenlign verdiene du finner her med den eksakte verdiene du fant over (og i Skriftlig innlevering 1).

```

In [ ]: # Antall realisasjoner man skal bruke
n = 1000

# Simuler realisasjoner av X ved å kalle på simX-funksjonen i cellen over
simulerte_X = ...

# Approksimer sannsynligheten
P_X_le_2 = ...

# Skriv ut resultatet
print("Approksimert sannsynlighet: ", P_X_le_2)

```

Oppgave 2 *

Vi skal igjen studere den diskrete sannsynlighetsfordelingen fra oppgave 1.

- Regn ut forventningsverdien til X , $E[X]$
- Regn ut variansen, $\text{Var}(X)$, og standardavviket, $\text{SD}[X]$.
- Bruk *simX*-funksjonen definert over til å finne tilnærmede verdier for $E[X]$ og $\text{SD}[X]$. Sammenlign tilnærmingene med de eksakte verdiene du regnet ut over. Kjør gjerne simuleringen (f.eks med $n = 1000$) flere ganger.

Oppgave 3 *

La X være en stokastisk variabel som beskriver hvor lang tid en komponent har fungert i det den svikter. Vi kaller da X for *levetiden* for komponenten.

Levetiden X (målt i antall år) til en bestemt type mekaniske komponenter har vist seg å følge en fordeling med kumulativ fordelingsfunksjon gitt ved

$$F_X(x) = 1 - \exp\left\{-\frac{x^2}{\alpha}\right\}; x \geq 0,$$

der $\alpha > 0$ er en parameter som beskriver kvaliteten til komponentene.

Deloppgave a)

- Finn sannsynlighetstettheten til X , $f_X(x)$. Eventuelt hent denne fra din besvarelse av Skriftlig innlevering 1.

Deloppgave b)

La $U \sim \text{Unif}[0, 1]$.

- Finn en formel for hvordan man fra U kan definere X slik at kumulativ fordeling for X blir som angitt over.
- Skriv en python-funksjon som genererer n realisasjoner av X . La funksjonen ha to input-parametre, antall realisasjoner n og verdien til kvalitetsparameteren α . Benytt funksjonen til å generere (for eksempel) $n = 10\,000\,000$ realisasjoner av X med (for eksempel) $\alpha = 1$, og lag et sannsynlighetshistogram for de genererte verdiene. Spesifiser at histogrammet skal ha 100 intervaller, se kode under. Plott også sannsynlighetstettheten $f_X(x)$ i samme plott som sannsynlighetshistogrammet. Ser det ut til at du har generert realisasjoner av X på korrekt måte?

```
In [ ]: def generateX(n,alpha):
        u = np.random.uniform(size=n) #array med n elementer.
        x = ... # fyll inn formelen du fant for x

        return x

# Sett antall realisasjoner og verdien til alpha
n = 10000000
alpha = 1

# simuler realisasjoner av X
simulerte_X = ...

# Lag sannsynlighetshistogram for de simulerte verdiene,
# vi spesifiserer antall intervaller ved å sette "bins=100"
plt.hist(simulerte_X, density=True, bins=100) #density=True
#gjør at vi får et sannsynlighetshistogram

# Angi navn på aksene

# Regn ut og plott sannsynlighetstettheten til X på samme plott

# Avslutt med å generere alle elementene du har plottet
plt.show()
```

Her er deloppgave b) slutt.

Deloppgave c)

Et instrument inneholder fem komponenter av denne typen, to av disse komponentene har kvalitetsparameter $\alpha = 1$ og de andre tre komponentene har $\alpha = 1.2$. De fem komponentene svikter uavhengig av hverandre og instrumentet fungerer så lenge minst tre av de fem komponentene fungerer. La Y betegne levetiden til instrumentet.

- Skriv en python-funksjon som genererer n realisasjoner av Y . Funksjonen skal ha en input-parameter, nemlig antall realisasjoner n . Benytt funksjonen til å generere (for eksempel) $n = 10\,000$ realisasjoner av Y , og lag et sannsynlighetsistogram for de genererte verdiene.
- Benytt python-funksjonen til å finne tilnærmede verdier for $P(Y \geq 1)$ og $P(Y \geq 1 | Y \geq 0.75)$.
- Benytt også python-funksjonen til å finne tilnærmede verdier for $E[Y]$ og $SD[Y]$.

```
In [ ]: # definer funksjonen og benytt denne som angitt i oppgaven
```

Oppgave 4 *

Det er oppgitt (det trenger du ikke å vise) at

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^4} dx = 2 \cdot \Gamma\left(\frac{5}{4}\right)$$

La X være en stokastisk variabel med sannsynlighetstetthet gitt ved

$$f_X(x) = \frac{a}{2\Gamma(\frac{5}{4})} e^{-(x-1)^4} + \frac{b}{2\Gamma(\frac{5}{4})} e^{-(x-4)^4} \quad -\infty < x < \infty$$

der a og b er positive tall.

- Hva må gjelde for a og b for at $f_X(x)$ skal bli en gyldig sannsynlighetstetthet?
- Finn en formel for $E[X]$ som en funksjon av a og b .

Oppgave 5

Simultanfordelingen $f_{XY}(x, y)$ til to diskret fordelte stokastiske variabler X og Y er gitt ved følgende tabell.

	$y = 0$	$y = 1$	$y = 2$
$x = 0$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$
$x = 1$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$
$x = 2$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$

- Finn marginalfordelingen for X , dvs $f_X(x)$, og den betingede fordelingen for Y gitt X , dvs $f_{Y|X}(y|x)$.
- Finn forventningsverdien for X , $E[X]$, og forventningsverdien til Y , $E[Y]$.
- Er X og Y uavhengige stokastiske variabler? Begrunn svaret.
- Finn $\text{Cov}[X, Y]$.

Oppgave 6

Et fly skal gå fra Værnes til Oslo Gardermoen. Flyets nettovekt (inkl. drivstoff) er 50 tonn. Før flyet kan starte skal det fylles med 200 personer (passasjerer + personal) som alle medbringer bagasje. Anta at vekten til en vilkårlig person på flyet har forventning lik 70 og standardavvik 15 (kg) og at vekten til en vilkårlig bagasje har forventning 20 og standardavvik 5 (kg).

Deloppgave a)

Anta at vektene til de forskjellige personene og bagasjene i flyet alle er uavhengige.

- Hva er forventet bruttovekt i tonn til flyet da det forlater terminalen?
- Hva er standardavviket?

Deloppgave b)

Et fly er utstyrt med et antall flymotorer. Under en flytur gjelder at en vilkårlig motor svikter med sannsynlighet p . Hvis flyet har flere motorer svikter de uavhengig av hverandre.

- Hvis et fly har 4 motorer og $p = 0.01$, hva er da sannsynligheten for at minst to motorer svikter under flyvningen?
- La oss anta at flyet fungerer hvis minst halvparten av motorene til flyet fungerer. For hvilke verdier på p er et fly med 4 motorer sikrere enn et med 2?

Fasit:

- Oppgave 1: 0.40
- Oppgave 2: $E[X] = 2.65$, $\text{Var}[X] = 1.3275$
- Oppgave 5: $E[X] = \frac{5}{6}$, $E[Y] = \frac{4}{3}$, $\text{Cov}[X, Y] = 0$
- Oppgave 6a): 68, 0.224
- Oppgave 6b): $5.9 \cdot 10^{-4}$, $0 < p < \frac{1}{3}$