

Plan for dagens plenumsregning

- ★ Hvordan vite nøyaktigheten til approksimasjonen vi får ved stokastisk simulering?
- ★ Regning med summer — forventningsverdi og varians

Definisjoner: Forventningsverdi, varians, kovarians og korrelasjon

Definisjon (Forventningsverdi)

La X være en stokastisk variabel med sannsynlighetsfordeling $f(x)$. Hvis X er en diskret stokastisk variabel er forventningsverdien til X gitt som

$$\mu = \mu_X = E[X] = \sum_x x \cdot f(x)$$

der summer er over alle mulige verdier for x . Hvis X er en kontinuert stokastisk variabel er forventningsverdien til X gitt som

$$\mu = \mu_X = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx.$$

Definisjon (Varians)

Variansen til en stokastisk variabel X med forventningsverdi $E[X] = \mu$ er

$$\sigma^2 = \sigma_X^2 = \text{Var}[X] = E[(X - \mu)^2].$$

Definisjon (Kovarians)

Kovariansen mellom to SV X og Y er

$$\sigma_{XY} = \text{Cov}[X, Y] = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)],$$

der $\mu_X = E[X]$ og $\mu_Y = E[Y]$.

Definisjon (Korrelasjon)

Korrelasjonen mellom to stokastiske variabler X og Y er

$$\rho = \rho_{XY} = \text{Corr}[X, Y] = \frac{\text{Cov}[X, Y]}{\sqrt{\text{Var}[X] \cdot \text{Var}[Y]}}.$$

Regneregler for forventingsverdi og varians

- ★ Basis regneregler for lineære funksjoner

$$E[aX] = aE[X]$$

$$\text{Var}[aX] = a^2 \text{Var}[X]$$

$$E[b] = b$$

$$\text{Var}[b] = 0$$

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y]$$

$$\text{Var}[X + Y] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y] + 2\text{Cov}[X, Y]$$

- ★ Regneregler for summer

$$E \left[\sum_{i=1}^n X_i \right] = \sum_{i=1}^n E[X_i]$$

$$\text{Var} \left[\sum_{i=1}^n X_i \right] = \sum_{i=1}^n \text{Var}[X_i] + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} \text{Cov}[X_i, X_j]$$

- ★ For uavhengige stokastiske variabler $X_1, X_2, \dots, X_n$

$$\text{Var} \left[\sum_{i=1}^n X_i \right] = \sum_{i=1}^n \text{Var}[X_i]$$

- ★ Andre nyttige regneregler

$$\text{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2$$

$$\text{Cov}[X, Y] = E[X \cdot Y] - E[X] \cdot E[Y]$$

- ★ Hvis X og Y er uavhengige stokastiske variabler

$$E[X \cdot Y] = E[X] \cdot E[Y]$$

$$\text{Cov}[X, Y] = 0$$

Approximasjon ved stokastisk simulering

- ★ Approximasjon av sannsynlighet, $p = P(X \leq r)$, $X \sim f_X(x)$

1. Genererer uavhengige realisasjoner $x_1, x_2, \dots, x_m \sim f_X(x)$
2. Approximer p med

$$\hat{p} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbb{I}(x_i \leq r).$$

- ★ Approximasjon av forventingsverdi, $\mu = E[X]$, $X \sim f_X(x)$

1. Genererer uavhengige realisasjoner $x_1, x_2, \dots, x_m \sim f_X(x)$
2. Approximer μ med

$$\hat{\mu} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i$$

- ★ Approximasjon av forventingsverdi til en funksjon, $\mu_g = E[g(X)]$, $X \sim f_X(x)$

1. Genererer uavhengige realisasjoner $x_1, x_2, \dots, x_m \sim f_X(x)$
2. Approximer μ med

$$\hat{\mu}_g = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m g(x_i)$$