

Plan for dagens plenumsregning

★ Regne på eksempler/situasjoner som inkluderer

- sannsynligheter i normalfordeling
- poissonfordeling
- binomisk fordeling
- simultan sannsynlighetsfordeling
- utregning av marginalfordeling

Poissonprosess of poissonfordeling

Definisjon (Poissonprosess)

En prosess $\{N(t); t \geq 0\}$ kalles en poissonprosess med intensitet λ hvis følgende krav er oppfylt

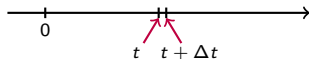
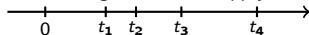
1. $N(0) = 0$.
2. For $0 \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$ er $N(t_2) - N(t_1)$ og $N(t_4) - N(t_3)$ uavhengige.
3. For $t \geq 0$ og $\Delta t > 0$ har vi at

$$P(N(t + \Delta t) - N(t) = 1) = \lambda \Delta t + o(\Delta t),$$

$$P(N(t + \Delta t) - N(t) \geq 2) = o(\Delta t),$$

der hver $o(\Delta t)$ angir en funksjon som oppfyller

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0.$$



Definisjon (Poissonfordeling)

La $N(t)$ være en poissonprosess med intensitet λ . Fikser en verdi $t > 0$ og la $X = N(t)$. Vi sier da at X er poissonfordelt med parameter λt .

Teorem (Punktsannsynlighet i poissonfordeling)

La X være poissonfordelt med parameter λt . Da er punktsannsynligheten til X gitt ved

$$f(x) = P(X = x) = \frac{(\lambda t)^x}{x!} e^{-\lambda t} \quad \text{for } x = 0, 1, 2, \dots$$

Binomisk fordeling

Definisjon (Bernoulli forsøksrekke)

Anta at vi gjentar et stokastisk forsøk mange ganger. Vi sier da at vi har en Bernoulli forsøksrekke dersom

- ★ *forsøket har to mulige utfall, som vi kaller henholdsvis «suksess» og «fiasko»,*
- ★ *utfallet av forsøkene er uavhengige,*
- ★ *sannsynligheten for suksess er lik (p) i alle forsøkene.*

Definisjon (Binomisk fordeling)

Anta at vi har en Bernoulli forsøksrekke hvor vi gjentar et forsøk n ganger, og la X være antall forsøk som gir suksess. Vi sier da at X er binomisk fordelt med parametre n og p .

- ★ Binomisk fordeling

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, x = 0, 1, 2, \dots, n$$

Simultanfordeling

Definisjon (Simultanfordeling)

Hvis vi har to diskrete SV X og Y er deres simultanfordeling (simultan punktsannsynlighet) $f(x, y)$ gitt ved

$$f(x, y) = P(X = x, Y = y).$$

Hvis vi har to kontinuerlige SV X og Y er deres simultanfordeling (simultan sannsynlighetstetthet) $f(x, y)$ gitt ved

$$P((X, Y) \in A) = \iint_A f(x, y) dx dy,$$

der $A \subseteq \mathbb{R}^2$.

★ Merk:

- noen ganger skriver vi $f_{XY}(x, y)$ i stedet for $f(x, y)$ for å understreke at det er simultanfordelingen for de SV X og Y
- når X og Y er diskrete SV må $f(x, y)$ oppfylle

$$f(x, y) \geq 0$$

$$\sum_x \sum_y f(x, y) = 1$$

- når X og Y er kontinuerlige SV må $f(x, y)$ oppfylle

$$f(x, y) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$$

Betinget fordeling

Betinget sannsynlighet: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Multiplikasjonssetningen: $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$

Definisjon (Betinget fordeling)

La X og Y være SV med simultanfordeling $f_{XY}(x, y)$. Den betingede fordelingen for Y gitt $X = x$ er da

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_X(x)} \quad \text{hvis } f_X(x) > 0,$$

og den betingede fordelingen for X gitt $Y = y$ er

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)} \quad \text{hvis } f_Y(y) > 0.$$

★ Multiplikasjonssetningen for fordelinger

$$f_{XY}(x, y) = f_{Y|X}(y|x)f_X(x)$$

$$f_{XY}(x, y) = f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)$$

Marginalfordeling

- ★ La $f_{XY}(x, y)$ være simultanfordelingen til de to stokastiske variablene X og Y
 - hva er da (marginal)fordelingen til X , $f_X(x)$?
- ★ Husk regneregelen: Hvis $A_1, A_2, \dots, A_n$ er parvis disjunkte hendelser har vi at

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

- ★ Hvis X og Y er diskrete SV gir denne at

$$f_X(x) = P(X = x) = P\left(\bigcup_y (X = x, Y = y)\right) = \sum_y P(X = x, Y = y) = \sum_y f_{XY}(x, y)$$

$$f_Y(y) = P(Y = y) = P\left(\bigcup_x (X = x, Y = y)\right) = \sum_x P(X = x, Y = y) = \sum_x f_{XY}(x, y)$$

- ★ Tilsvarende har vi for kontinuerlige SV, men må da integrere i stedet for å summere

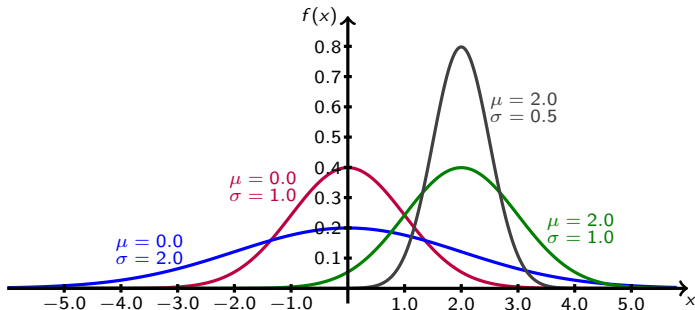
$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx$$

Normalfordeling

★ Sannsynlighetstetthet

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{(x - \mu)^2}{\sigma^2} \right\}, -\infty < x < \infty$$



★ Kumulativ fordelingsfunksjon

$$F(x) = P(X \leq x) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

Trykkfeil i manuskript (eksamensoppgave i 1995)

- ★ Situasjon: Antall trykkfeil, N , i et manuskript på s sider antas å være poissonfordelt med parameter λs ,

$$P(N = n) = \frac{(\lambda s)^n}{n!} \exp\{-\lambda s\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Anta at en korrekturleser oppdager hver trykkfeil med sannsynlighet p og at de ulike trykkfeilene oppdages uavhengig av hverandre. La X være antall trykkfeil som korrekturleseren oppdager. Gitt $N = n$ blir da X binomisk fordelt,

$$P(X = x | N = n) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Trykkfeil i manuskript (eksamensoppgave i 1995)

- ★ Situasjon: Antall trykkfeil, N , i et manuskript på s sider antas å være poissonfordelt med parameter λs ,

$$P(N = n) = \frac{(\lambda s)^n}{n!} \exp\{-\lambda s\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Anta at en korrekturleser oppdager hver trykkfeil med sannsynlighet p og at de ulike trykkfeilene oppdages uavhengig av hverandre. La X være antall trykkfeil som korrekturleseren oppdager. Gitt $N = n$ blir da X binomisk fordelt,

$$P(X = x | N = n) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, n.$$

- ★ Hvis $\lambda = 2$ og $s = 8$, hva er sannsynligheten for at antall trykkfeil er større enn 10?

Trykkfeil i manuskript (eksamensoppgave i 1995)

- ★ Situasjon: Antall trykkfeil, N , i et manuskript på s sider antas å være poissonfordelt med parameter λs ,

$$P(N = n) = \frac{(\lambda s)^n}{n!} \exp\{-\lambda s\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Anta at en korrekturleser oppdager hver trykkfeil med sannsynlighet p og at de ulike trykkfeilene oppdages uavhengig av hverandre. La X være antall trykkfeil som korrekturleseren oppdager. Gitt $N = n$ blir da X binomisk fordelt,

$$P(X = x | N = n) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, n.$$

- ★ Hvis $\lambda = 2$ og $s = 8$, hva er sannsynligheten for at antall trykkfeil er større enn 10?
- ★ Hvis manuskriptet inneholder 12 trykkfeil og $p = 0.6$, hva er sannsynligheten for at korrekturleseren oppdager alle trykkfeilene?

Trykkfeil i manuskript (eksamensoppgave i 1995)

- ★ Situasjon: Antall trykkfeil, N , i et manuskript på s sider antas å være poissonfordelt med parameter λs ,

$$P(N = n) = \frac{(\lambda s)^n}{n!} \exp\{-\lambda s\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Anta at en korrekturleser oppdager hver trykkfeil med sannsynlighet p og at de ulike trykkfeilene oppdages uavhengig av hverandre. La X være antall trykkfeil som korrekturleseren oppdager. Gitt $N = n$ blir da X binomisk fordelt,

$$P(X = x | N = n) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, n.$$

- ★ Hvis $\lambda = 2$ og $s = 8$, hva er sannsynligheten for at antall trykkfeil er større enn 10?
- ★ Hvis manuskriptet inneholder 12 trykkfeil og $p = 0.6$, hva er sannsynligheten for at korrekturleseren oppdager alle trykkfeilene?
- ★ Finn simultanfordelingen for N og X .

Trykkfeil i manuskript (eksamensoppgave i 1995)

- ★ Situasjon: Antall trykkfeil, N , i et manuskript på s sider antas å være poissonfordelt med parameter λs ,

$$P(N = n) = \frac{(\lambda s)^n}{n!} \exp\{-\lambda s\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Anta at en korrekturleser oppdager hver trykkfeil med sannsynlighet p og at de ulike trykkfeilene oppdages uavhengig av hverandre. La X være antall trykkfeil som korrekturleseren oppdager. Gitt $N = n$ blir da X binomisk fordelt,

$$P(X = x | N = n) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, n.$$

- ★ Hvis $\lambda = 2$ og $s = 8$, hva er sannsynligheten for at antall trykkfeil er større enn 10?
- ★ Hvis manuskriptet inneholder 12 trykkfeil og $p = 0.6$, hva er sannsynligheten for at korrekturleseren oppdager alle trykkfeilene?
- ★ Finn simultanfordelingen for N og X .
- ★ La Y være antall trykkfeil som ikke oppdages. Finn simultanfordelingen til N og Y .

Trykkfeil i manuskript (eksamensoppgave i 1995)

- ★ Situasjon: Antall trykkfeil, N , i et manuskript på s sider antas å være poissonfordelt med parameter λs ,

$$P(N = n) = \frac{(\lambda s)^n}{n!} \exp\{-\lambda s\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Anta at en korrekturleser oppdager hver trykkfeil med sannsynlighet p og at de ulike trykkfeilene oppdages uavhengig av hverandre. La X være antall trykkfeil som korrekturleseren oppdager. Gitt $N = n$ blir da X binomisk fordelt,

$$P(X = x | N = n) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, n.$$

- ★ Hvis $\lambda = 2$ og $s = 8$, hva er sannsynligheten for at antall trykkfeil er større enn 10?
- ★ Hvis manuskriptet inneholder 12 trykkfeil og $p = 0.6$, hva er sannsynligheten for at korrekturleseren oppdager alle trykkfeilene?
- ★ Finn simultanfordelingen for N og X .
- ★ La Y være antall trykkfeil som ikke oppdages. Finn simultanfordelingen til N og Y .
- ★ Finn marginalfordelingen til Y . Hva slags type fordeling er dette?