

Plan for dagens undervisning

- ★ Regne på eksempler/situasjoner som inkluderer
 - eksponensialfordeling og poissonprosess
 - transformasjonsformelen
 - feilforplantning

Poissonprosess of poissonfordeling

Definisjon (Poissonprosess)

En prosess $\{N(t); t \geq 0\}$ kalles in poissonprosess med intensitet λ hvis følgende krav er oppfylt

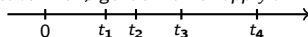
1. $N(0) = 0$.
2. For $0 \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$ er $N(t_2) - N(t_1)$ og $N(t_4) - N(t_3)$ uavhengige.
3. For $t \geq 0$ og $\Delta t > 0$ har vi at

$$P(N(t + \Delta t) - N(t) = 1) = \lambda \Delta t + o(\Delta t),$$

$$P(N(t + \Delta t) - N(t) \geq 2) = o(\Delta t),$$

der hver $o(\Delta t)$ angir en funksjon som oppfyller

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0.$$



★ X : tid til første hendelse

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0$$

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, x \geq 0$$

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}, \quad \text{Var}[X] = \frac{1}{\lambda^2}$$

Transformasjonsformel

- ★ Anta $X \sim f_X(x)$ kontinuerlig stokastisk variabel
- ★ Definer ny stokastisk variabel $Y = u(X)$
 - $y = u(x)$ er strengt monoton, dvs $y = u(x) \Leftrightarrow x = w(y)$
- ★ Spørsmål: Hvordan kan vi da finne fordelingen til Y , $f_Y(y)$?

Teorem (Transformasjonsformelen)

Anta at X er en kontinuerlig stokastisk variabel med sannsynlighetstthet $f_X(x)$, og la $Y = u(X)$ der $u(x)$ er en strengt monoton funksjon. Sannsynlighetstettheten til Y er da gitt ved

$$f_Y(y) = f_X(w(y)) \cdot |w'(y)|,$$

der $w(y)$ er den inverse funksjonen til $u(x)$, dvs $y = u(x) \Leftrightarrow x = w(y)$.

Transformasjonsformel

- ★ Anta $X \sim f_X(x)$ kontinuerlig stokastisk variabel
- ★ Definer ny stokastisk variabel $Y = u(X)$
 - $y = u(x)$ er strengt monoton, dvs $y = u(x) \Leftrightarrow x = w(y)$
- ★ Spørsmål: Hvordan kan vi da finne fordelingen til Y , $f_Y(y)$?

Teorem (Transformasjonsformelen)

Anta at X er en kontinuerlig stokastisk variabel med sannsynlighetstthet $f_X(x)$, og la $Y = u(X)$ der $u(x)$ er en strengt monoton funksjon. Sannsynlighetstettheten til Y er da gitt ved

$$f_Y(y) = f_X(w(y)) \cdot |w'(y)|,$$

der $w(y)$ er den inverse funksjonen til $u(x)$, dvs $y = u(x) \Leftrightarrow x = w(y)$.

- ★ Alternativ til å bruke transformasjonsformelen:
 - først regne ut $F_Y(y) = P(Y \leq y)$
 - bruke regneregler vi kjenner for sannsynlighet
 - til slutt finne $f_Y(y) = F'_Y(y)$

Feilforplantning

★ Situasjon:

- har flere uavhengige stokastiske variabler: X , Y , Z
- er interessert en en funksjon av disse

$$V = g(X, Y, Z)$$

- ønsker å approksimere $E[V]$ og $\text{Var}[V]$

★ Bruker Taylors formel for rekkeutvikling av $g(x, y, z)$

- rekkeutvikler x om $\mu_X = E[X]$, y om $\mu_Y = E[Y]$, og z om $\mu_Z = E[Z]$
- approksimerer ved kun å ta med opp til første ordens ledd

$$\begin{aligned} g(x, y, z) &\approx g(\mu_X, \mu_Y, \mu_Z) + \frac{\partial g}{\partial x}(\mu_X, \mu_Y, \mu_Z) \cdot (x - \mu_X) \\ &\quad + \frac{\partial g}{\partial y}(\mu_X, \mu_Y, \mu_Z) \cdot (y - \mu_Y) + \frac{\partial g}{\partial z}(\mu_X, \mu_Y, \mu_Z) \cdot (z - \mu_Z) \end{aligned}$$

★ Får dermed at

$$\begin{aligned} E[V] &= E[g(X, Y, Z)] \approx g(\mu_X, \mu_Y, \mu_Z) \\ \text{Var}[V] &= \text{Var}[g(X, Y, Z)] \approx \left(\frac{\partial g}{\partial x}(\mu_X, \mu_Y, \mu_Z) \right)^2 \text{Var}[X] + \left(\frac{\partial g}{\partial y}(\mu_X, \mu_Y, \mu_Z) \right)^2 \text{Var}[Y] \\ &\quad + \left(\frac{\partial g}{\partial z}(\mu_X, \mu_Y, \mu_Z) \right)^2 \text{Var}[Z] \end{aligned}$$

★ Den siste av disse formlene kalles (Gauss) feilforplantningsformel