

# Plan for dagens undervisning

- ★ Regne på eksempler/situasjoner som inkluderer
  - estimere lyshastigheten i luft basert på Michelsons data fra 1879
  - regne ut SME i normalfordeling
  - sjekke om estimatorer er forventningsrette, finne varians til estimatorer
  - SME i en situasjon hvor det ikke fungerer å derivere og sette lik null

# Sannsynlighetsmaksimeringsprinsippet og SME

## Definisjon (Sannsynlighetsmaksimeringsprinsippet)

*Dersom man skal estimere verdien til en parameter  $\theta$  ut fra observerte verdier  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , skal man velge som estimat den verdi av  $\theta$  som gjør det mest sannsynlig å observere de verdiene man faktisk har observert.*

## Definisjon (Rimelighetsfunksjonen)

*La  $X_1, X_2, \dots, X_n$  være stokastiske variabler med simultan sannsynlighetsfordeling  $f(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)$ , der  $\theta$  er en skalar parameter eller en vektor av parametre. Anta at en formel for  $f(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)$  er kjent, men at verdien til  $\theta$  er ukjent. Hvis man har observerte verdier  $x_1, x_2, \dots, x_n$  for de stokastiske variablene  $X_1, X_2, \dots, X_n$  er rimelighetsfunksjonen gitt som*

$$L(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta).$$

## Definisjon (Log-rimelighetsfunksjonen)

*La  $L(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n)$  være en rimelighetsfunksjon. Log-rimelighetsfunksjonen er da*

$$\ell(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n) = \ln L(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n)$$

*for de verdier av  $\theta$  hvor  $L(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$ .*

# Regneregler for forventingsverdi og varians

- ★ Basis regneregler for lineære funksjoner

$$E[aX] = aE[X]$$

$$\text{Var}[aX] = a^2 \text{Var}[X]$$

$$E[b] = b$$

$$\text{Var}[b] = 0$$

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y]$$

$$\text{Var}[X + Y] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y] + 2\text{Cov}[X, Y]$$

- ★ Regneregler for summer

$$E \left[ \sum_{i=1}^n X_i \right] = \sum_{i=1}^n E[X_i]$$

$$\text{Var} \left[ \sum_{i=1}^n X_i \right] = \sum_{i=1}^n \text{Var}[X_i] + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} \text{Cov}[X_i, X_j]$$

- ★ For uavhengige stokastiske variabler  $X_1, X_2, \dots, X_n$

$$\text{Var} \left[ \sum_{i=1}^n X_i \right] = \sum_{i=1}^n \text{Var}[X_i]$$

- ★ Andre nyttige regneregler

$$\text{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2$$

$$\text{Cov}[X, Y] = E[X \cdot Y] - E[X] \cdot E[Y]$$

- ★ Hvis  $X$  og  $Y$  er uavhengige stokastiske variabler

$$E[X \cdot Y] = E[X] \cdot E[Y]$$

$$\text{Cov}[X, Y] = 0$$

# Noen egenskaper til normalfordeling og $\chi^2$ -fordeling

## Teorem

La  $X_1, X_2, \dots, X_n$  være uavhengige og  $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . La  $a_1, a_2, \dots, a_n$  og  $b$  være konstanter, og

$$Y = \sum_{i=1}^n a_i X_i + b = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n + b.$$

Da er

$$Y \sim N\left(\sum_{i=1}^n a_i \mu_i + b, \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2\right)$$

★ Spesielt:  $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Leftrightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$

## Teorem

Anta at  $X \sim N(0, 1)$ . Da er  $X^2 \sim \chi_1^2$ .

## Teorem

La  $X_1, X_2, \dots, X_n$  være uavhengige og  $X_i \sim \chi_{\nu_i}^2$ . La  $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ . Da er  $Y$  kjikvadratfordelt med  $\sum_{i=1}^n \nu_i$  frihetsgrader.