NTNU

Kunnskap for ei betre verd

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgåve i **TMA4250 Romleg Statistikk**

Fagleg kontakt under eksamen: Professor Henning Omre

Tlf: 90937848

Eksamensdato: 5. juni 2015

Eksamenstid (frå–til): 09:00-13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatne hjelpemiddel: C:

Tabeller og Formler i Statistikk, Tapir
NTNU godkjend kalkulator
Personlege, handskrivne, gule titte-ark - A5-format

Målform/språk: nynorsk

Sidetal: 3

Sidetal vedlegg: 0

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgåve 1 KONTINUERLEGE STOKASTISKE FELT.

Sjå på eit kontinuerleg stokastisk felt $\{R(x); x \in \mathbb{R}^1\}$, definert på eit 1D referanserom $[-\infty, \infty]$. Modelparametra er:

$$\mathrm{E}\{R(x)\} = \mu_R(x) = 10 - (x-a)^2 \;; x \in \mathbb{R}^1$$
$$\mathrm{Cov}\{R(x'), R(x'')\} = c_R(\tau) = \exp\left\{-\frac{1}{10}\tau^2\right\} \;; x', x'' \in \mathbb{R}^1$$

med $\tau = x'' - x'$.

Feltet har altså høgste forventa verdi lik 10 i den ukjende lokasjonen $x = a$, og kovariansfunksjonen er gitt og translasjonsinvariant.

a) Spesifiser kravet som krevst til ein gyldig romleg kovariansfunksjon.

Teikn ei skisse av kovariansfunksjonen, $c_R(\tau)$ og forklar kva eigenskapar ved feltet ein kan tolka frå skissa.

La det stokastiske feltet vere observert i lokasjonane $(x_1, \dots, x_n)$, det vil seie at observasjonane er $R_o = (R(x_1), \dots, R(x_n))$.

b) Definer den lineære estimatoren for lokasjonen til høgste forventa verdi a:

$$\hat{a} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i R(x_i)$$

der $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ er ukjende vekter som skal avgjerast.

Utlei eit uttrykk for den beste lineære forventningsrette estimatoren under kvadratisk tap for a basert på observasjonssettet R_o. Berre minimeringsproblemet som må løysast for å avgjere vektene er naudsynt.

Definer det tilhøyrande deriverte feltet $\{R^*(x) = \frac{dR(x)}{dx}; x \in \mathbb{R}^1\}$.

c) Utlei uttrykk for følgande modellparametre til det deriverte feltet $\{R^*(x); x \in \mathbb{R}^1\}$:

$$\mathrm{E}\{R^*(x)\} = \mu_{R^*}(x) \;; x \in \mathbb{R}^1$$
$$\mathrm{Cov}\{R^*(x'), R^*(x'')\} = c_{R^*}(\tau) \;; x', x'' \in \mathbb{R}^1$$

med $\tau = x'' - x'$.

Teikn ei skisse av kovariansfunksjonen, $c_{R^*}(\tau)$ og forklar kva eigenskapar ved det deriverte feltet ein kan tolke frå skissa.

Anta at det stokastiske deriverte feltet også er observert i lokasjonane $(x_1, \ldots, x_n)$, det vil seie at derivert-observasjonane er $R_o^* = (R^*(x_1), \ldots, R^*(x_n))$.

d) Definer den lineære estimatoren for lokasjonen til høgste forventa verdi a:

$$\hat{a} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i R(x_i) + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i R^*(x_i)$$

der dei ukjende vektene $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ og $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ skal avgjerast.

Utled eit uttrykk for den beste lineære forventningsrette estimatoren under kvadratisk tap for a basert på observasjonssettene R_o og R_o^*. Berre minimeringsproblemet som må løysast for å avgjere vektene er naudsynt.

Oppgåve 2 HENDELSES STOKASTISKE FELT.

Sjå på eit punkt stokastisk felt $\mathbb{F}_X : \{X_i; i = 1, \ldots, N; \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2\}$ definert over området $\mathcal{D} : [0, 10] \times [0, 10]\ [m^2] \in \mathbb{R}^2$.

Anta først at feltet er eit homogent Poisson stokastisk felt med konstant intensitetsparameter $\lambda \geq 0\ [m^{-2}]$.

a) Spesifiser sannsynet for at det ikkje finst nokre punkt i området $\mathcal{D}$. Grunngi svaret.

Spesifiser forventa tal på punkt i området $\mathcal{D}$. Grunngi svaret.

Gitt at talet på punkt i området $\mathcal{D}$ er $N = 10$, spesifiser sannsynset for at det er nøyaktig 3 punkt i del-området $\mathcal{D}_\Delta : [0, 5] \times [0, 5]\ [m^2]$. Grunngi svaret.

Anta frå no at feltet er eit Cox stokastisk felt kor, betinget på intensitetsparametren λ, feltet er eit homogent Poisson felt som definert over. Intensitetsparametren λ er no stokastisk med sannsynstettleik $f(\lambda) = \frac{1}{\mu} \exp\{-\frac{\lambda}{\mu}\}$; $\lambda \geq 0$.

b) Utlei eit uttrykk for forventa tal på punkt $\mathrm{E}\{N\}$ og variansen til tal på punkt $\mathrm{Var}\{N\}$ for Cox feltet.

Definer S som kortaste avstand mellom midtpunktet i området $\mathcal{D}$ og næraste punkt i punktfeltet $\mathbb{F}_X$. Anta at randeffekter forårsaka av at området er endeleg kan ignorerast.

c) Utlei eit uttrykk for sannsynstettleiken til S for Cox feltet.

Oppgåve 3 MOSAIKK STOKASTISKE FELT.

Sjå på eit mosaikk stokastisk felt $L : \{L_x \,; x \in \mathcal{L}_\mathcal{D}\}$ der $\mathcal{L}_\mathcal{D}$ er eit regulært grid med n noder over $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$, og $L_x \in \Omega_l : \{W, B\}$. Det betyr at variablen L_x kan tilhøyre ein av klassane kvit (W) eller svart (B) for kvar $x \in \mathcal{L}_\mathcal{D}$.

Definer følgande Gibbs modell for feltet:

$$\text{Prob}\{L = l; \beta\} = \text{const}_\beta \times \exp\{\beta \Sigma_{<u,v>} I(l_u = l_v)\}$$

der $u, v \in \mathcal{L}_\mathcal{D}$, $< u, v >$ representerer alle par av næraste naboar i griddet $\mathcal{L}_\mathcal{D}$ og $I(A)$ er ein indikatorfunksjon som tek verdien 1 når A er sann og 0 ellers. Feltet er altså eit Ising stokastisk felt. Me antar at modellparameteren β er kjend.

Realisasjonar av feltet kan, teoretisk sett, genererast av ein ein-node ('single-site') Markov chain Monte Carlo (McMC) Metropolis-Hasting (M-H) simuleringsalgoritme. Denne algoritmen er iterativ og baserer seg på eit forslags- og aksept/forkast-konsept i kvar iterasjon. To moglege forslagsfordelingar er: trekk ein node uniformt over $\mathcal{L}_\mathcal{D}$ og oppdater node-klassen ved anten å a) bytte klasse eller b) trekke klasse uniformt over Ω_l , uavhengig av klassene i naboskapet.

a) Nytt formell algoritmebeskrivelse og matematisk formalisme i besvarelsen, og ver særs nøye med notasjonen.

Spesifiser ein-node McMC M-H simuleringsalgoritmen for feltet.

Spesifiser dei to forslagsfordelingane skissert over og diskuter deira karakteristika.

Utlei berekningseffektive uttrykk for akseptsannsynet for dei to forslagsfordelingane.

Samanlikn dei to algoritmane definert av dei to forslagsfordelingane ved å rekne ut sannynet for at realisasjonen av feltet endrast i ein iterasjon, og vurder kva dette inneber for konvergens- og miksings-eigenskapane til algoritmane.