Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Henning Omre 73 59 35 31

EKSAMEN I FAG 75563 ROMLIG STATISTIKK

Onsdag 4. juni 1997
Tid: 0900 - 1300

Hjelpemidler:
- Statistiske tabeller og formler, Tapir
- Godkjent lommekalkulator
- Egetprodusert titte-ark - A4 format

Faglærer:
- Prof. Henning Omre, Institutt for matematiske fag; NTNU

Oppgave 1

SEKVENSIELL ALGORITME

Betrakt et stokastisk kontinuerlig felt $\{R(x); x \in \mathcal{D} \subset \mathbf{R}^2\}$ med $R(x) \in \mathbf{R}^1$. Det kan representeres som en mengde av stokastiske variable i et $n \times n$ grid over $\mathcal{D}$, herfra $\underline{R} = (R_1, ..., R_m)$, hvor $m = n \times n$ og ordningen er vilkårlig i gridet. Den tilhørende sannsynlighetstettheten er definert som $f_{\underline{R}}(\underline{r})$.

En ønsker å generere en realisasjon av det stokastiske feltet representert ved $\underline{r}$. En simuleringsalgoritme er kalt sekvensiell algoritme (Sequential Algorithm). Den består i å sekvensielt generere realisasjoner i gridet, men hver gang betinge på de verdier som allerede er generert.

a) Bruk sannsynlighetstettheten til formelt å rettferdiggjøre denne algoritmen.

   Hva kreves for at denne algoritmen skal kunne benyttes i praksis?

b) Angi en modelltype hvor denne algoritmen åpenbart kan benyttes, og spesifiser de uttrykkene som inngår i algoritmen.

Dersom dimensjonen av gridet, $m = n \times n$, er svært stor vil ikke en eksakt versjon av algoritmen kunne benyttes - hvorfor?
Angi hvilke approksimasjoner som synes naturlige.

Oppgave 2

MARKOV-EGENSKAP

Betrakt et stokastisk kontinuerlig felt (prosess) $\{R(x); x \in \mathcal{L} \subset \mathbf{R}^1\}$ med $R(x) \in \mathbf{R}^1$, dvs. med en-dimensjonal referanse x.

Markov-egenskapen i slike felt (prosesser) defineres som følger:

Betrakt en vilkårlig, ordnet mengde av referanser $(x_1, ..., x_n)$ med tilhørende stokastiske variable $\underline{R} = (R(x_1), ..., R(x_n)) \equiv (R_1, ..., R_n)$. For en vilkårlig x_i i mengden har en da:

$$f_{R_i|R_1,..,R_{i-1},R_{i+1},...,R_n}(r_i|r_1,..,r_{i-1},r_{i+1},..,r_n) = f_{R_i|R_{i-1},R_{i+1}}(r_i|r_{i-1},r_{i+1})$$

a) Vis formelt for $n = 5$ og $i = 3$ at dersom $\{R(x); x \in \mathcal{L} \subset \mathbf{R}^1\}$ er et Gaussisk stokastisk felt (prosess) med parametre:

$$E\{R(x)\} = \mu;\ \forall x$$
$$\text{Cov}\{R(x'), R(x'')\} = \sigma^2 exp\{-\alpha \cdot |x' - x''|\};\ \forall x', x''$$

med kjent μ, σ^2 og α, så vil $\{R(x); x \in \mathcal{L} \subset \mathbf{R}^1\}$ ha Markov-egenskaper.

Oppgave 3

SAMPLING I PUNKTMODELLER

Betrakt et stokastisk punktfelt, $\{X_i; i = 1, ..., n\}$ med $X \in \mathcal{D} \subset \mathbf{R}^2$, med sannsynlighetstetthet:

$$f_{X_1,..,X_n}(x_1, ..., x_n) = \text{konst } \times \exp\{\sum_i^n a(x_i) + \sum_i^n \sum_{\substack{j \\ i \neq j}}^n b(x_i, x_j)\}$$

med $a(.)$ og $b(.,.)$ kjente funksjoner og n kjent. En ønsker å generere realisasjoner av dette stokastiske feltet.

a) Dersom $b(x_i, x_j) = 0.0$ for alle x_i, x_j, spesifiser en effektiv simuleringsalgoritme med alle involverte uttrykk.

Begrunn svaret.

b) For generell $b(x_i, x_j)$, spesifiser en effektiv simuleringsalgoritme med alle de involverte uttrykk.

Begrunn svaret.

c) Betrakt følgende simuleringsalgoritme:

Initier:

$$\underline{x}^\circ = (x_1^\circ, ..., x_n^\circ) \text{ med } f_{X_1,..,X_n}(x_1^\circ, ..., x_n^\circ) > 0$$

Iterer $i = 0, 1, ...$

$$\begin{aligned} &\text{generer} \quad l \sim \text{Uni}[\{1, ..., n\}] \\ &\text{generer} \quad x' \sim \text{Uni}[\mathcal{A}_{x_l^i} \cap \mathcal{D}] \\ &\underline{y} = (x_1^i, ..., x_{l-1}^i, x', x_{l+1}^i, ..., x_n^i) \\ &\underline{x}^{i+1} = \begin{cases} \underline{y} & \text{med sannsynlighet } \alpha_{\underline{x}^i, \underline{y}} \\ \underline{x}^i & \text{med sannsynlighet } 1 - \alpha_{\underline{x}^i, \underline{y}} \end{cases} \end{aligned}$$

hvor $\text{Uni}[\{1, ..., n\}]$ betyr diskret uniform sannsynlighetstetthet på mengden $\{1, ..., n\}$; $\text{Uni}[\mathcal{S}]$ betyr kontinuerlig uniform sannsynlighetstetthet på domene $\mathcal{S} \subset \mathbf{R}^2$; og $\mathcal{A}_x \subset \mathbf{R}^2$ er et domene med form $\mathcal{A}$ sentrert i $x \in \mathcal{D} \subset \mathbf{R}^2$.

Dette tilsvarer en Metropolis-Hastings algoritme dersom $\alpha_{\underline{x}^i, \underline{y}}$ spesifiseres korrekt. Algoritmen vil da for $i \to \infty$ generere realisasjoner fra $f_{X_1,..,X_n}(x_1, .., x_n)$.

Spesifiser det korrekte uttrykket for $\alpha_{\underline{x}^i, \underline{y}}$.