Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Henning Omre 73 59 35 31

EKSAMEN I FAG 75563 ROMLIG STATISTIKK

Lørdag 30. mai 1998
Tid: 0900 - 1300

Hjelpemidler:
 Statistiske tabeller og formler, Tapir
 Godkjent lommekalkulator
 Egetprodusert titte-ark - A4 format

Faglærer:
 Prof. Henning Omre, Institutt for matematiske fag; NTNU

Oppgave 1 KONTINUERLIGE FELT

Betrakt et kontinuerlig stokastisk felt $\{Z(x); x \in \mathcal{D}\}$ med x referanse i $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$. Anta at feltet er stasjonært og isotropt med forventning og kovariansfunksjon

$$E\{Z(x)\} = a$$

$$\text{Cov}\{Z(x'), Z(x'')\} = C(|x' - x''|) = C(h)$$

hvor a er en ukjent konstant og $h = |x' - x''|$ er avstanden mellom x' og x''. Den tilsvarende variogramfunksjonen er

$$\frac{1}{2}\,\text{Var}\{Z(x') - Z(x'')\} = \gamma(|x' - x''|) = \gamma(h).$$

La videre det stokastiske feltet være observert i

$$\{Z(x_i); x_i \in \mathcal{D}; \quad i = 1, \ldots, n\}$$

a) Utled relasjonen mellom $C(h)$ og $\gamma(h)$. Skissér typiske funksjonsformer for $C(h)$ og $\gamma(h)$. Følgende estimatorer kan brukes for $C(h)$ og $\gamma(h)$ for en bestemt verdi av h:

$$\hat{C}(h) = \frac{1}{N_h} \sum_{i,j \in \mathcal{A}_h} Z(x_i)Z(x_j) - \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z(x_i)\right]^2$$

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{2N_h} \sum_{i,j \in \mathcal{A}_h} (Z(x_i) - Z(x_j))^2$$

med

$$\mathcal{A}_h : \{(i,j) | \, |x_i - x_j| = h; i,j = 1, \ldots, n\}$$
$$N_h = \# \mathcal{A}_h$$

Hvorfor er disse estimatorene rimelige? Utled forventningen til hver av estimatorene. Er de forventningsrette? Kommenter resultatet.

b) Det kreves at kovariansfunksjonen er positiv definitt. Spesifiser dette kravet på matematisk form og forklar dets opphav.

Vis at summen av to positiv definitte kovariansfunksjoner også er positiv definitt.

La nå de to første momentene være:

$$E\{Z(x)\} = a_0 + \sum_{l=1}^{L} a_l g^l(x)$$

$$\mathrm{Cov}\{Z(x'), Z(x'')\} = C(|x' - x''|)$$

hvor $L > 0$ er et kjent heltall, $a_0, \ldots, a_L$ er ukjente konstanter og $g^1(x), \ldots, g^L(x)$ er kjente funksjoner. Anta at feltet er observert i

$$\{Z(x_i); x_i \in \mathcal{D}; \quad i = 1, \ldots, n\}$$

c) Betrakt en vilkårlig $x_0 \in \mathcal{D}$ og definer følgende lineære prediktor

$$Z(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i Z(x_i)$$

Utled beste lineære forventningsrette prediktor under kvadratisk tap. Det er tilstrekkelig å utlede det minimeringsproblem som må løses.

d) En ønsker å predikere gjennomsnittsverdien

$$\bar{Z}_{\mathcal{D}} = \frac{1}{|\mathcal{D}|} \int_{\mathcal{D}} Z(u)\, du$$

Utled beste lineære forventningsrette prediktor under kvadratisk tap for denne. Også her er det tilstrekkelig å utlede det minimeringsproblem som må løses.

Oppgave 2 HENDELSESFELT

Betrakt et Poisson punktfelt med konstant intensitet λ over $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$. La den stokastiske variablen $N(\mathcal{B})$ være antall punkt i domenet $\mathcal{B} \subset \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$.

a) Betrakt en partisjon av $\mathcal{D}$, benevnt $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$, dvs $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3 = \mathcal{D}$ samt $\mathcal{B}_i \cap \mathcal{B}_j = \emptyset$ for $i, j = 1, \ldots, 3$ og $i \neq j$.

Utled uttrykket for sannsynligheten

$$\text{Prob}\{N(\mathcal{B}_1) = n_1, N(\mathcal{B}_2) = n_2, N(\mathcal{B}_3) = n_3\}$$

b) Definer så $\mathcal{A}_1 = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ og $\mathcal{A}_2 = \mathcal{B}_3 \cup \mathcal{B}_2$. Utled uttrykket for sannsynligheten

$$\text{Prob}\{N(\mathcal{A}_1) = m_1, N(\mathcal{A}_2) = m_2\}$$

c) Betrakt en vilkårlig posisjon $x_0 \in \mathcal{D}$, og la $R(x_0)$ være avstanden fra x_0 til nærmeste punkt.

Utled sannsynlighetstettheten, $f_R(r)$, for denne avstanden.

Dersom en betinger på at det er et punkt i x_0, hva skjer da? Skissér utledningen og kommentér resultatet.

Oppgave 3 MOSAIKKFELT

Betrakt et mosaikkfelt representert på et regulært grid $\mathcal{L}$. Benevn feltet $L : \{L_{ij}; (i,j) \in \mathcal{L}\}$ og anta at $L_{ij} \in \{-1, 1\}$. Anta avidere at

$$\text{Prob}\{L = l\} = \text{konst} \times \exp\{-\beta \sum_{\langle ij,kl \rangle} l_{ij} l_{kl}\}$$

hvor summasjonen er over alle nærmeste naboer ij og kl, dvs. alle horisontale og vertikale nabopar. Dette benevnes også en Ising modell.

a) En skal generere en realisasjon av dette feltet vha. en Metropolis-Hastings algoritme. Forslagsmatrisen er som følger

$$Q_{ll'} = \begin{cases} 0 & \text{hvis } l \text{ og } l' \text{ avviker i} \\ & \text{mer enn en gridnode} \\ \frac{1}{2N_{\mathcal{L}}} & \text{ellers} \end{cases}$$

hvor $N_{\mathcal{L}}$ er antall gridnoder i $\mathcal{L}$. Akseptsannsynligheten er

$$\alpha_{ll'} = \min\{1, \frac{\text{Prob}\{L = l'\}}{\text{Prob}\{L = l\}} \frac{Q_{l'l}}{Q_{ll'}}\}$$

Utled uttrykket for $\alpha_{ll'}$ og kommentér resultatet.