Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Henning Omre 73 59 35 31

EKSAMEN I FAG 75563 ROMLIG STATISTIKK

Fredag 26. mai 2000
Tid: 0900 - 1300

Hjelpemidler:

- Statistiske tabeller og formler, Tapir
- Godkjent lommekalkulator
- Egetprodusert titte-ark - A4 format

Faglærer:

Prof. Henning Omre, Institutt for matematiske fag; NTNU

Oppgave 1 KONTINUERLIGE FELT

Betrakt et kontinuerlig stokastisk felt $\{R(x); x \in \mathbf{R}^1\}$. Merk at feltet har en-dimensjonal referanse. Anta:

$$E\{R(x)\} = 0$$
$$\text{Var}\{R(x)\} = 1$$
$$\text{Cov}\{R(x), R(x+h)\} = C(h) = \exp\{-h^2\}.$$

Definer også det deriverte feltet:

$$\{R'(x) = \frac{dR(x)}{dx}; x \in \mathbf{R}^1\}$$

a) Hvilke tilleggskrav må stilles for at $\{R(x); x \in \mathbf{R}^1\}$ skal være et Gaussisk felt? Anta at $\{R(x); x \in \mathbf{R}^1\}$ er Gaussisk, skisser da grafisk de bivariate sannsynlighetstetthetene (pdf) til:

$$[R(0), R(0.1)]$$
$$[R(0), R(1.0)]$$
$$[R(0), R(10.0)]$$

b) Angi kravet for at $\{R'(x); x \in \mathbf{R}^1\}$ skal eksistere. Vis at det er tilfredsstilt for $\{R(x); x \in \mathbf{R}^1\}$.

Demonstrer hvordan

$$\mathrm{Cov}\{R'(x), R(x+h)\}$$

kan utledes, og skriv opp uttrykket.

Hva er uttrykket for

$$\mathrm{Cov}\{R'(x), R'(x+h)\}$$

Skisser de to kovariansfunksjonene grafisk sammen med $C(h)$. Kommentér relasjonen mellom $R(x)$ og $R'(x)$ i vilkårlig $x \in \mathbf{R}^1$.

c) Anta at en har observert

$$R'(0) = 0.5$$

Utled beste lineære prediktor for $\{R(x); x \in \mathbf{R}^1\}$ basert på $R'(0) = 0.5$ under kvadratisk tap. Skisser prediksjonene grafisk og kommentér resultatet.

Oppgave 2 HENDELSESFELT

Betrakt et Poisson punktfelt definert over $\mathbf{R}^2$ med intensitet λ. La $B_1 \subset \mathbf{R}^2$ og $B_2 \subset \mathbf{R}^2$ med $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, være to disjunkte domener, og $N(B_1)$ og $N(B_2)$ være antall punkt i hhv B_1 og B_2.

a) Hva er sannsynligheten for at en observerer eksakt to punkter i B_1?
Anta at en observerer $N(B_1) = 2$.
Regn ut uttrykket for den betingete sannsynligheten:

$$\mathrm{Prob}\{N(B_2) = k | N(B_1) = 2\}$$

b) Betrakt en vilkårlig posisjon $x_0 \in \mathbf{R}^2$, og definer:

$R_{(1)}$ - avstand fra x_0 til nærmeste punkt i Poisson feltet
$R_{(2)}$ - avstand fra x_0 til nest-nærmeste punkt i Poisson feltet.

Utled sannsynlighetstettheten (pdf) til variablen $R_{(2)}$.
Utled sannsynlighetstettheten (pdf) til den bivariate variablen $(R_{(1)}, R_{(2)})$.
Vis at de to resultatene er konsistente.

Oppgave 3 MOSAIKKFELT

Betrakt den stokastiske variablen $\{L_x; x \in \mathcal{L}_D\}$ hvor $\mathcal{L}_D$ er et grid over domenet $D \subset \mathbf{R}^2$. La utfallsrommet for L_x være diskret, dvs. $L_x \in \{1, ..., K\}$; for alle $x \in \mathcal{L}_D$, og la det være positiv sannsynlighet for alle utfall .

a) Anta at $\{L_x; x \in \mathcal{L}_D\}$ er et Markov felt med naboskap 3×3.

Hva innebærer denne Markov antakelsen?

Skriv opp og tolk uttrykket for det tilsvarende Gibbs feltet.

Hva er hovedbudskapet i Hammersley-Clifford teorem?