Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Henning Omre 73 59 35 31/20

EKSAMEN I FAG SIF5064 ROMLIG STATISTIKK

Torsdag 10. mai 2001
Tid: 0900-1300

Hjelpemidler:
- Statistiske tabeller og formler, Tapir.
- Godkjent lommekalkulator
- Egetprodusert gult titte-ark - A4-format

Faglærer:
- Prof. Henning Omre, Institutt for matematiske fag; NTNU

Sensuren faller i uke 22

Oppgave 1 KONTINUERLIGE FELT

Betrakt et kontinuerlig stokastisk felt $\{R(x); x \in \mathbb{R}^n\}$, og benevn:

$$E\{R(x)\} = \mu$$

$$\mathrm{Var}\{R(x) - R(x+h)\} = 2 \cdot \gamma(h)$$

hvor μ er en ukjent konstant og $\gamma(h)$ er variogramfunksjonen.

a) Anta først at $\{R(x); x \in \mathbb{R}^n\}$ er annen-ordens stasjonært.

Hva innebærer det?

Utled relasjonen mellom den romlige kovariansfunksjonen og variogramfunksjonen under denne forutsetningen.

Anta heretter at $\{R(x); x \in \mathbb{R}^n\}$ er IRF-1 (Intrinsic Random Function of order one).

b) Hva innebærer antakelsen IRF-1?

Hvilke krav stilles til variogramfunksjonen, $\gamma(h)$, for at den skal være gyldig under IRF-1 antakelsen?

Forklar kort begrunnelsen for disse kravene.

c) Anta at variogramfunksjonen er av følgende form:

$$\gamma(h) = \tau|h|^\nu \quad ; \quad \tau > 0 \quad ; \quad 0 \leq \nu < 2$$

Et felt som dette sies å være fraktalt, nærmere bestemt 'affine similar'.

Hva menes med det?

Demonstrer at feltet har denne egenskapen.

Oppgave 2 HENDELSES FELT

Betrakt et stasjonært punktfelt over $\mathbb{R}^2$ med intensitet.

$$\lambda = \frac{E\{N(\mathcal{D})\}}{|\mathcal{D}|}$$

hvor $N(\mathcal{D})$ er antall punkter i et vilkårlig domene $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$; og $|\mathcal{D}|$ er arealet av $\mathcal{D}$. Videre defineres K-funksjonen som:

$$K(r) = E\{N(r\mathcal{B}_0)\}/\lambda$$

hvor $\mathcal{B}_0 \subset \mathbb{R}^2$ er et vilkårlig plassert sirkulært enhets-areal domene; og r er en skaleringsfaktor.

Anta at en har observert alle punktene i et domene $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^2$, og benevn punktene $\{x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{B}\}$.

a) Anta at feltet er et Poisson punktfelt.

Definer rimelige estimatorer for λ og $K(r)$, basert på $\{x_1, \ldots, x_n\}$, og evaluer deres forventningsretthets- og variansegenskaper.

b) Definer rimelige estimatorer for λ og $K(r)$, basert på $\{x_1, \ldots, x_n\}$, uten å gjøre noen tilleggsantakelser om punktfeltet.

Diskutér forventningsretthets- og variansegenskapene til disse estimatorene.

Oppgave 3 MOSAIKK FELT

Betrakt et stokastisk felt $L : \{L_x; x \in \mathcal{L}_\mathcal{D}\}$ hvor $\mathcal{L}_\mathcal{D}$ er et grid over domenet $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$. La utfallsrommet være $L_x \in \{-1, 1\}$ for alle $x \in \mathcal{L}_\mathcal{D}$.

Anta at feltet er et stasjonært Ising-felt med fire-nærmeste-nabo naboskap.

a) Skriv opp Markov- og Gibbsformuleringen for feltet. Vær nøye med notasjonen og definisjonene.

b) En skal generere et utfall av Markovfeltet $L : \{L_x; x \in \mathcal{L}_\mathcal{D}\}$ ved å benytte en Gibbs-sampler hvor to nabogridnoder oppdateres samtidig.

Ta utgangspunkt i Metropolis-Hastingsalgoritmen og utled denne Gibbs sampler algoritmen.