Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Henning Omre   73 59 35 31/20

EKSAMEN I FAG SIF5064 ROMLIG STATISTIKK

Tirsdag 14. mai 2002
Tid: 0900-1300

Hjelpemidler:
Statistiske tabeller og formler, Tapir
Godkjent lommekalkulator
Egetprodusert gult titte-ark - A4-format

Faglærer:
Prof. Henning Omre, Institutt for matematiske fag; NTNU

Sensuren faller i uke 23.

Oppgave 1 KONTINUERLIGE FELT

Betrakt et kontinuerlig stokastisk felt $\{R(x); x \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2\}$ med

$$E\{R(x)\} = \sum_{i=0}^{3} a_i g_i(x) = \mu(x); \text{ alle } x \in \mathcal{D}$$

hvor $g(x) = (g_0(x), \ldots, g_3(x))$ er kjente funksjoner, samt $g_0(x) = 1$, og $a = (a_0, \ldots, a_3)$ er ukjente konstanter.

Videre er kovariansfunksjonen

$$\text{Cov}\{R(x'), R(x'')\} = C(\tau) \text{ ; alle } x', x'' \in \mathcal{D}$$

hvor $\tau = |x'' - x'|$. Anta også at $C(\tau)$ er ukjent.

a) Hvilke krav må stilles til kovariansfunksjonen for at modellen skal være gyldig? Formuér dette kravet matematisk.

Anta nå at feltet observeres i 50 vilkårlige posisjoner:

$$R^0 : \{R(x_1), \dots, R(x_{50})\}$$

b) Beskriv hvordan du ville estimere kovariansfunksjonen, $C(\tau)$, basert på disse observasjonene. Hvilke problemer oppstår?

Nevn kort alternative estimeringsmetoder.

Anta heretter at kovariansfunksjonen, $C(\tau)$, er bestemt og antas som kjent.

c) En ønsker å predikere feltet i en vilkårlig, ikke-observert, posisjon $x_0 \in \mathcal{D}$. Dvs at en vil predikere $R(x_0)$, basert på observasjonene R^0.

Utled beste lineære forventningsrette prediktor under kvadratisk tap ('Best Linear Unbiased Predictor under Quadratic Loss' - BLUP). Det er tilstrekkelig å sette opp det minimeringssystem som må løses.

d) Anta nå at det bare er to observasjoner:

$$R^{00} : \{R(x_1), R(x_2)\}$$

Hvilke problemer oppstår da i prediksjonen i punkt c)?

Dersom koeffisientene i forventningsfunksjonen $E\{R(x)\}$ betraktes som stokastiske, $A = (A_0, \dots, A_3)$, med kjente momenter $E\{A\} = \mu_A$ og $\mathrm{Cov}\{A\} = \sum_A$, kan problemet løses. Vis hvordan.

Oppgave 2 HENDELSES FELT

Betrakt et stasjonært punktfelt over $\mathbb{R}^2$ med intensitet λ.

Anta at feltet observeres ved å telle antallet punkter i syv vilkårlige lokaliserte, ikke-overlappende, sirkulære områder med ulik radius:

radius [cm]	antall punkt
3	5
6	24
9	47
12	82
15	123
18	183
21	248

a) Spesifisér en estimator for intensiteten λ. Bestem estimatet.

b) Hvordan kan hypotesen om at det er et Poisson punktfelt undersøkes.

c) Anta at det er et Poisson punktfelt. Spesifiser maksimum likelihood estimatoren for intensiteten λ.

Skissér en alternativ estimator som også trekker på Poisson punktfelt antakelsen.

Oppgave 3 MOSAIKK FELT

Betrakt et stokastisk felt $L : \{L_x; x \in \mathcal{L}_\mathcal{D}\}$ hvor $\mathcal{L}_\mathcal{D}$ er et grid over domenet $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$. La utfallsrommet være $L_x \in \{-1, 1\}$ for alle $x \in \mathcal{L}_\mathcal{D}$. Anta at simultanfordelingen kan skrives som:

$$\text{Prob}\{L = l\} = \text{const} \times \exp\{\beta \sum_{x \sim y} I(l_x = l_y)\}$$

hvor $I(A)$ er lik 1 hvis A er sann og 0 ellers, og $x \sim y$ betegner alle nærmeste nabopar, dvs alle horisontale og vertikale naboer. Feltet er altså et Ising-felt.

Anta at modellparameteren β er ukjent.

La $L = l^0$ være en observert realisasjon av feltet.

a) En ønsker å estimere β.

Spesifer likelihoodfunksjonen for modellen over og forklar hvorfor den er vanskelig å benytte til estimering av β.

Definer pseudolikelihood-funksjonen for modellen over, og utled så maksimum pseudolikelihood estimatoren for β. Det er tilstrekkelig å angi det likningssystem som må løses.

Overse randeffekter i alle definisjoner og utledninger over.