Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Henning Omre 73 59 35 31/20

EKSAMEN I EMNE TMA4250 ROMLIG STATISTIKK

Torsdag 27. mai 2004
Tid: 0900-1300

Hjelpemidler:
- Statistiske tabeller og formler, Tapir
- Godkjent lommekalkulator
- Egetprodusert gult titte-ark - A4-format

Faglærer:
- Prof. Henning Omre, Institutt for matematiske fag; NTNU

Sensuren faller i uke 25.

Oppgave 1 KONTINUERLIGE FELT

Betrakt et stasjonært, isotropt Gaussisk stokastisk felt $\{R(x); x \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2\}$. Anta videre at feltet er deriverbart. Feltet er parametrisert med forventning, romlig kovariansfunksjon og variogramfunksjon definert som:

$$\mu = E\{R(x)\}$$

$$c(\Delta x) = \text{Cov}\{R(x'), R(x'')\}$$

$$\gamma(\Delta x) = \frac{1}{2}\text{Var}\{R(x') - R(x'')\}$$

hvor $\Delta x = |x' - x''|$

a) Utled relasjonen mellom $c(\Delta x)$ og $\gamma(\Delta x)$. Forklar hva en vet om $c(\Delta x)$ og $\gamma(\Delta x)$ ut fra kjennskap til at feltet er deriverbart.

Feltet er observert med observasjonsfeil, en gang i hver av posisjonene $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{D}$:

$$R^0(x_i) = R(x_i) + U_i : i = 1, \dots, n$$

hvor $U_1, \dots, U_n$ er uavhengige identisk Gaussisk fordelte med forventning 0 og varians σ_U^2, samt uavhengige av $\{R(x); x \in \mathcal{D}\}$.

b) Definer følgende naive estimatorer for μ og $\gamma(\Delta x)$:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} R^0(x_i)$$

$$\hat{\gamma}(\Delta x) = \frac{1}{2n_{\Delta x}} \sum_{ij \in A_{\Delta x}} (R^0(x_i) - R^0(x_j))^2$$

med $A_{\Delta x} : \{ij \mid |x_i - x_j| = \Delta x; ij = 1, \dots, n\}$ og $n_{\Delta x} = \sharp A_{\Delta x}$. Evaluer forventningsretthetsegenskapene til disse estimatorene.

Presentér en enkel grafisk skisse for $\hat{\gamma}(\Delta x)$ og forklar hvordan $\gamma(\Delta x)$ og σ_U^2 kan estimeres. Hvordan kan $c(\Delta x)$ estimeres?

c) Anta nå at $c(\Delta x)$ og σ_U^2 er kjent, mens μ er ukjent. Betrakt en vilkårlig posisjon $x_0 \in \mathcal{D}$ og definér prediktoren:

$$\hat{R}(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i R^0(x_i)$$

hvor $\alpha_i; i = 1, \dots, n$ er ukjente vekter. Utled den ordinære krigingprediktoren, dvs. den forventningsrette minste varians prediktoren, for $R(x_0)$. Spesifiser også den tilhørende prediksjonsvariansen. Presentér videre en enkel grafisk skisse for hvordan prediktoren med tilhørende prediksjonsvarians vil være i og like rundt en vilkårlig observasjonsposisjon x_i.

Oppgave 2 HENDELSESFELT

Betrakt et punkt stokastisk felt $\{X_i; i = 1, \dots, N\}$ over området $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$. Anta at et relativt lite antall punkter er identifisert og at avstanden fra disse punktene til nærmeste nabopunkt er observert. Observasjonene $d_1, \dots, d_k$ består altså av avstander mellom nærmeste nabopunkter.

Anta at feltet er et homogent Poisson stokastisk felt med intensitet λ.

a) Sannsynlighetstettheten for avstand mellom nærmeste nabopunkter, d, under Poisson feltantakelser er på formen:

$$f(d) = c_1 d \exp\{c_2 d^2\}$$

hvor c_1 og c_2 er to konstanter som kan være avhengige av λ.

Utled det eksakte uttrykket for $f(d)$, dvs. bestem c_1 og c_2.

b) Utled maksimum likelihoodestimatoren for intensiteten λ basert på observasjonene $d_1, \ldots, d_k$. I utregningene kan en anse observasjonene som uavhengige.

Anta heretter at feltet er et 'hard-kjerne' Poisson stokastisk felt med parametre: kjerneradius a og intensitet λ. Det vil si at det er sannsynlighet null for at to punkter er nærmere hverandre enn a og at det ikke er noen parvis interaksjon mellom to punkt som er lengre fra hverandre enn a. Merk at dette feltet har stor likhet med et vanlig Poisson felt bortsett fra at det er en total-frastøtene skive med radius a rundt hvert punkt.

Sannsynlighetstettheten for avstanden mellom nærmeste nabopunkter, d, under 'hard-kjerne' Poisson felt antakelser kan approksimeres med

$$f(d|d > a)$$

det vil si sannsynlighetstettheten for d under vanlige Poisson felt antakelser betinget på at d er større enn a.

c) Utled maksimum likelihood estimatorene for parametrene a og λ under denne approksimative sannsynlighetstettheten basert på observasjonene $d_1, \ldots, d_k$. I utregningene kan en anse observasjonene som uavhengige.

Oppgave 3 MOSAIKKFELT

Betrakt et Ising stokastisk felt $L : \{L_x; x \in \mathcal{L}_\mathcal{D}\}$ hvor $\mathcal{L}_\mathcal{D}$ er et grid over domenet $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$, og utfallsrommet $L_x \in \{-1, 1\}$ for alle $x \in \mathcal{L}_\mathcal{D}$.

Simultanfordelingen kan skrives som:

$$\text{Prob}\,\{L = l\} = \text{const} \times \exp\{\beta \sum_{x \sim y} I(l_x = l_y)\}$$

hvor $I(A)$ er lik 1 hvis A er sann og 0 ellers, og $x \sim y$ betegner alle nærmeste grid naboer dvs. alle horisontale og vertikale naboer. Anta videre at modellparameteren β er kjent.

Feltet observeres gridnode for gridnode, men i hver node er det sannsynlighet p for at feil utfall observeres.

a) Spesifiser et formelt uttrykk for observasjonslikelihoodfunksjonen samt posteriori sannsynlighetsfordelingen.

b) Spesifisér en $MCMC$-algoritme slik at en kan simulere fra posteriori sannsynlighetsfordelingen.