Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Bokmål

Faglig kontakt under eksamen:
Håkon Tjelmeland 73 59 35 38

EKSAMEN I EMNE TMA4250 ROMLIG STATISTIKK

Lørdag 28. mai 2005
Tid: 09:00–13:00

Hjelpemidler: Kalkulator HP30S
Statistiske tabeller og formler, Tapir forlag.
Ett gult ark (A5 med stempel) med egne formler og notater.

Sensur er ferdig: 20. juni 2005.

Oppgave 1 Gaussisk felt

I denne oppgaven skal vi betrakte et gaussisk felt $\{Y(s), s \in \mathbb{R}^2\}$. Som kjent er egenskapene til et gaussisk felt entydig bestemt av forventningsfunksjonen $\mu(s) = \mathrm{E}[Y(s)]$, variansfunksjonen $\sigma^2(s) = \mathrm{Var}[Y(s)]$ og korrelasjonsfunksjonen $\rho(s, s') = \mathrm{Corr}[Y(s), Y(s')]$.

a) En funksjon $\rho(s, s')$ må oppfylle visse krav for at den skal være en lovlig korrelasjonsfunksjon. Spesifisér disse kravene matematisk og forklar bakgrunnen for dem.

Angi et eksempel på en lovlig korrelasjonsfunksjon og skisser denne.

b) Angi definisjonen for at et stokastisk felt er strengt stasjonært.

Benytt denne definisjonen til å utlede krav som funksjonene $\mu(s)$, $\sigma^2(s)$ og $\rho(s, s')$ må oppfylle når man har et strengt stasjonært gaussisk felt.

Anta nå at

$$\mu(s) = 0 \quad , \quad \sigma^2(s) = 1 \quad \text{og} \quad \rho(s,s') = \exp\left\{-||s-s'||^2\right\}, \tag{1}$$

der $||s - s'||$ angir vanlig Euclidsk avstand mellom posisjonene s og s'. Anta videre at man har observert verdien til $Y(s)$ lik 0 i posisjon $(0,0)$ og lik 1 i posisjon $(1,0)$. Vi ønsker å predikere verdien til det gaussiske feltet i en ny posisjon $s_0 = (t,0)$ for ulike verdier av t.

c) Regn ut betinget forventnings- og variansfunksjon for $Y((t,0))$ når de observerte verdier er som spesifisert over. Skisser et 95%-prediksjonsintervall for $Y((t,0))$ i et plott som funksjon av t.

Hint: Formel for den inverse av en symmetrisk og invertibel 2×2*-matrise er*

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \frac{1}{ac - b^2} \begin{bmatrix} c & -b \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

d) Hvordan vil resultatene i punkt **c**) endre seg dersom man i stedet for parameterfunksjonene i (1) har

$$\mu(s) = 0 \quad , \quad \sigma^2(s) = 1 \quad \text{og} \quad \rho(s,s') = \begin{cases} \frac{1}{2}\exp\left\{-||s-s'||^2\right\} & \text{når } s \neq s', \\ 1 & \text{når } s = s'? \end{cases}$$

Det kreves her ikke at du regner ut numerisk svar. Det er tilstrekkelig at du forklarer de kvalitative endringene i betinget forventings- og variansfunksjon, og i et plott skisserer hvordan prediksjonsintervallet vil endre seg.

Oppgave 2 SAR-målinger

SAR (Synthetic Aperture Radar) er en målemetode som benyttes for å kartlegge jordoverflaten fra satelitt. Teknikken går kort fortalt ut på at man sender ut radarstråler fra satelitten og observerer, for hver gridnode i et grid $S = \{(i,j) | i,j = 1,\ldots,n\}$, hvor mye av denne strålingen som reflekteres tilbake. Hvor mye av radarstrålingen som reflekteres avhenger av egenskapene til jordoverflaten i den aktuelle posisjonen og dermed kan man skille mellom ulike overflatetyper. Ut fra fysiske lover for radarstråler er det kjent at en observasjon, Y_{ij}, vil være gammafordelt med parametre a og $b = r_{ij}/a$, dvs. sannsynlighetstettheten er gitt ved

$$f_{Y_{ij}}(y) = \frac{a^a}{r_{ij}^a \Gamma(a)} y^{a-1} \exp\left\{-\frac{ay}{r_{ij}}\right\}, \tag{2}$$

der a er antall "looks" og reflektivitetsparameteren r_{ij} er en størrelse som beskriver refleksjonsegenskapene til jordoverflaten der observasjonen gjøres. Vi skal dessuten anta at Y_{ij} for ulike gridnoder (i,j) er uavhengig av hverandre (for gitt $\{r_{ij}, (i,j) \in S\}$). Antall looks a er noe man velger når man gjør målingene og er dermed en kjent størrelse (og lik for hele griddet), mens $\{r_{ij}, (i,j) \in S\}$ er det man ønsker å bestemme.

I denne oppgaven skal vi forutsette at man har tatt et SAR-bilde over et område hvor det kun finnes to overflatetyper, som vi for gridnode (i,j) kaller $X_{ij} \in \{0,1\}$. For gridnode $(i,j) \in S$, la $r_{ij} = r_0$ dersom $X_{ij} = 0$ og $r_{ij} = r_1$ dersom $X_{ij} = 1$. I første del av oppgaven (dvs. i punktene **a**), **b**) og **c**)) skal vi forutsette at r_0 og r_1 er kjente størrelser.

a) Finn sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren (maximum likelihood estimator) for overflatetype X_{ij} i gridnode $(i,j) \in S$.

Vi skal så betrakte problemet med å estimere X_{ij} i en bayesiansk setting og antar apriori at $X_{ij}, (i,j) \in S$ er et Ising-felt med (kjent) parameter β.

b) Skriv ned formelen for apriori simultanfordeling for $X_{ij}, (i,j) \in S$.

Fra denne simultanfordelingen, utled en enkel formel for

$$\mathrm{P}\{X_{ij} = 1 | X_{kl} = x_{kl}, (k,l) \neq (i,j)\}$$

c) Utled aposteriori betinget sannsynlighet for X_{ij}, dvs. utled en enkel formel for

$$\mathrm{P}\{X_{ij} = 1 | X_{kl} = x_{kl}, (k,l) \neq (i,j) \ \text{ og } \ Y_{kl} = y_{kl}, (k,l) \in S\}$$

Forklar hvordan du kan benytte dette til å estimere overflatetype i en gridnode (i,j). Angi spesielt hvilken estimator du vil benytte.

Til slutt skal vi se på situasjonen når r_0 og r_1 er ukjente.

d) Forklar hvorfor det **ikke** er fornuftig å anta at r_0 og r_1 apriori er uavhengige og identisk fordelt.

Anta så at vi lager en apriorifordeling for (r_0, r_1) ved å starte med uavhengige inverse gammafordelinger med parametre 1 og 1, og så trunkerer dette til området $r_0 < r_1$. Dvs.

$$\pi(r_0, r_1) \propto \begin{cases} \frac{e^{-(r_0+r_1)}}{(r_0 r_1)^2} & \text{hvis } r_0 < r_1, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Bestem da alle betingede fordelinger som trengs for å benytte en Gibbs-sampler-algoritme for å simulere fra den resulterende aposteriorifordelingen. Diskuter også kort hvordan du vil gå frem for å trekke fra hver av de betingede fordelingene.