Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Professor Henning Omre
(90937848/735 93531)

Eksamen i TMA4250 ROMLIG STATISTIKK

Lørdag 26. mai 2007
Tid: 09.00 - 13:00

Hjelpemidler:
Statistiske tabeller og formler, Tapir
Godkjent lommekalkulator (HP30S)
Egetprodusert gult titte-ark - A4-format

Sensur: Mandag 18. juni 2007

Oppgave 1 KONTINUERLIGE STOKASTISKE FELT.

Betrakt et Gaussisk stokastisk felt (GRF) $\{R(x); x \in \mathbb{R}^1\}$ i 1D, med modelparametre:

$$E\{R(x)\} = \begin{cases} a & \text{for } x < 0 \\ b & \text{for } x \geq 0 \end{cases} \; ; x \in \mathbb{R}^1$$

$$\text{Cov}\{R(x'), R(x'')\} = c(\Delta x) \; ; x', x'' \in \mathbb{R}^1$$

med a og b ukjente konstanter og $\Delta x = |x' - x''|$.

a) Kovariansfunksjonen $c(\Delta x)$ må være en positiv definitt funksjon.

Spesifiser de eksakte krav til en positiv definitt funksjon.

Anta at $\{R(x); x \in \mathbb{R}^1\}$ er observert i posisjonene $x \in \{-2, -1, 2, 4\}$ det vil si at $\{R(-2), R(-1), R(2), R(4)\}$ er observert.

b) Utled den beste lineære forventningsrette estimator (BLUE) under kvadratisk tap for forventningsparametrene a og b, og benevn disse $\hat{a}$ og $\hat{b}$. Det er tilstrekkelig å spesifisere det minimeringssystem som må løses.

Spesifiser uttrykkene for de tilhørende estimeringsvariansene for a og b, som funksjoner av BLUE-vektene identifisert over.

Det er åpenbart at forventningsfunksjonen $E\{R(x)\}$ kan ha en diskontinuitet i $x = 0^-$. Spranghøyden i denne diskontinuiteten defineres som $d = a - b$, og kan altså være både positiv og negativ.

c) En mulig forventningsrett estimator for d er åpenbart $\hat{d} = \hat{a} - \hat{b}$.

Utled uttrykket for 0.9 konfidensintervallet for spranghøyden basert på denne estimatoren. Det er tilstrekkelig at uttrykket er en funksjon av BLUE-vektene identifisert i punkt b).

Vil estimatoren $\hat{d}$ være BLUE for d ? Begrunn svaret i matematisk form.

Oppgave 2 HENDELSES STOKASTISKE FELT

Betrakt et homogent Poisson punkt stokastisk felt (PRF) med intensitet λ i området $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$. La arealet av området $\mathcal{D}$ være gitt som $a < \infty$, og la antallet punkter i $\mathcal{D}$ være den tilfeldige variablen N.

a) Spesifiser betingelsene for at et punkt stokastisk felt i området $\mathcal{D}$ skal være et homogent PRF med intensitet λ.

Anta at PRF er observert med uavhengige feil for hvert punkt. Hvert punkt er observert med sannsynlighet p eller oversett med sannsynlighet $1 - p$. La antallet punkt som blir observert være den tilfeldige variablen M.

b) Utled uttrykket for den betingete sannsynligheten $\text{Prob}\{N = n | M = m\}$.

Tolk og kommenter resultatet.

Oppgave 3 MOSAIKK STOKASTISKE FELT

Betrakt et Markov stokastisk felt (MRF) $L : \{L_x; x \in \mathcal{L}_\mathcal{D}\}$ hvor $\mathcal{L}_\mathcal{D}$ er et regulært (100x100)-grid over $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$, og $L_x \in \{-1, 1\}$. La Gibbs modellrepresentasjonen for dette MRF være:

$$\text{Prob}\ \{L = l\} = \text{const}\ \times \exp\{\beta \sum_{<u,v>} l_u l_v\}\ ; \beta > 0$$

hvor $< u, v >$ er de nærmeste to gridnodene i $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}$. Dette MRF tilsvarer altså et Ising-MRF.

a) Spesifiser uttrykket for Prob$\{L = l\}$ for de mest og de minst sannsynlige utfall av L. Skisser de tilsvarende utfallene.

Utled uttrykket for Markov modellrepresentasjonen for dette MRF.

Hva er hovedforskjellene mellom Gibbs og Markov modellformuleringene?