Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Professor Henning Omre
(90937848/735 93531)

Eksamen i TMA4250 ROMLIG STATISTIKK

Fredag 23. mai 2008
Tid: 09.00 - 13:00

Hjelpemidler:
Statistiske tabeller og formler, Tapir
Godkjent lommekalkulator (HP30S)
Egetprodusert gult titte-ark - A4-format

Sensur: Fredag 13. juni 2008

Oppgave 1 KONTINUERLIGE STOKASTISKE FELT.

Betrakt et kontinuerlig stokastisk felt $\{R(x); x \in \mathbb{R}^2\}$, med modelparametre:

$$E\{R(x)\} = \mu \ ; x \in \mathbb{R}^2$$

$$\text{Cov}\{R(x'), R(x'')\} = \sigma^2 \rho(\tau) \ ; x', x'' \in \mathbb{R}^2$$

med μ ukjent konstant, mens $\tau = |x' - x''|$, $\rho(\tau)$ er en gitt positiv definitt korrelasjonsfunksjon og σ^2 er en gitt varians.

a) Spesifiser de eksakte krav til en positiv definitt korrelasjonsfunksjon.

b) Anta at en observerer $R(x_1) = r_1$ og $R(x_2) = r_2$. Definer følgende lineære estimator for μ:

$$\hat{\mu} = \alpha_0 + \alpha_1 R(x_1) + \alpha_2 R(x_2)$$

hvor $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ er ukjente konstanter. Utled den beste lineære forventningsrette estimator (BLUE) under kvadratisk tap for forventningsverdien μ, samt tilhørende estimeringsvarians.

c) Anta at en observerer $R(x_1) = r_1$ og $\Delta_{23} = [R(x_2) - R(x_3)] = \delta_{23}$. Definer følgende lineære prediktor for $R(x_0)$:

$$\hat{R}(x_0) = \alpha_0 + \alpha_1 R(x_1) + \alpha_2 \Delta_{23}$$

hvor $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ er ukjente konstanter.

Utled den beste lineære forventningsrette prediktor (BLUP) under kvadratisk tap for $R(x_0)$, samt tilhørende prediksjonssvarians.

Oppgave 2 HENDELSES STOKASTISKE FELT

Betrakt et hendelses stokastisk felt i området $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$. La videre $\mathcal{A}$ og $\mathcal{B}$ være delmengder av $\mathcal{D}$. Definer $N(\mathcal{A})$ som den tilfeldige variablen tilsvarende antall hendelser i $\mathcal{A}$ og $N(\mathcal{B})$ tilsvarende for $\mathcal{B}$.

a) La feltet være et homogent Poisson felt med kjent intensitet λ.

Skriv opp uttrykkene for $E\{N(\mathcal{A})\}$ og $Var\{N(\mathcal{A})\}$

b) La feltet være et homogent Poisson felt med kjent intensitet λ.

Utled et uttrykk for $Cov\{N(\mathcal{A}), N(\mathcal{B})\}$. Bruk kjennskap til egenskaper av Poisson felt til å diskutere uttrykket.

c) Anta nå at intensiteten er en tilfeldig variabel Λ med sannsynlighetstetthet $f(\lambda)$ samt $E\{\Lambda\} = \mu_\lambda$ og $Var\{\Lambda\} = \sigma_\lambda^2$. La feltet gitt $\Lambda = \lambda$ være et homogent Poisson felt med intensitet λ. Feltet er altså et Cox felt.

Utled et uttrykk for $Cov\{N(\mathcal{A}), N(\mathcal{B})\}$. Bruk kjennskap til egenskaper av Poisson felt til å diskutere uttrykket.

Oppgave 3 MOSAIKK STOKASTISKE FELT

Betrakt et mosaikk stokastisk felt $L : \{L_u; u \in \mathcal{L}_\mathcal{D}\}$ hvor $\mathcal{L}_\mathcal{D}$ er et regulært grid over $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$, og $L_u \in \{-1, 1\}$. Anta at et naboskapssystem δ med tilhørende 'clique'-system C er definert.

a) Skriv opp både Gibbs-formuleringen og Markov-formuleringen for feltet definert over. Forklar med ord hva uttrykkene representerer.

b) Anta at 'clique'-systemet består av alle nærmeste naboer i $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}$, og at potensialfunksjonen er:

$$\nu_{<u,v>}(l) = \begin{cases} -\beta & \text{for } l_u = l_v \\ \beta & \text{ellers} \end{cases}$$

hvor $< u, v >$ er nærmeste naboer i gridet $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}$.

Anta videre at en realisasjon av feltet er observert, og benevnt $L = l^o$.

Spesifiser likelihood funksjonen for β basert på l^o. Forklar hvorfor det er vanskelig å bruke denne likelihood funksjonen til å estimere β. Skisser hvordan parameteren β kan estimeres fra l^o ved bruk av pseudo-likelihood kriteriet.