Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Kontaktperson under eksamen:
Professor Henning Omre
(90937848/735 93531)

Eksamen i TMA4250 ROMLIG STATISTIKK

Fredag 21.mai 2010
Tid: 09.00 - 13:00

Støtte:
Statistiske tabeller og formler, Tapir
NTNU Calculator (HP30S)
Egenprodusert, håndskrevet, gul huskelapp - A4-format

Sensur: Fredag 11.juni 2010

Oppgave 1 KONTINUERLIG STOKASTISK FELT.

Betrakt et Gaussisk stokastisk felt $\{R(x); x \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2\}$, med forventningsfunksjon $E\{R(x)\} = \mu_R(x)$; $x \in \mathcal{D}$, variansfunksjon $\text{Var}\{R(x)\} = \sigma_R^2(x)$; $x \in \mathcal{D}$, og positiv definitt romlig korrelasjonsfunksjon $\text{Corr}\{R(x'), R(x'')\} = \rho_R(x', x'')$; $x', x'' \in \mathcal{D}$. Anta at alle parameterverdier er kjent.

a) Spesifiser de eksakte betingelser for at $\{R(x); x \in \mathcal{D}\}$ skal være et Gaussiak stokastisk felt.

Spesifiser tilleggsbetingelsene for at $\{R(x); x \in \mathcal{D}\}$ skal være stasjonært og isotropt.

Betrakt et relatert kontinuerlig stokastisk felt:

$$\{S(x) = \sum_{l=1}^{L} B_l g_l(x) + R(x) = g^T(x)B + R(x); x \in \mathcal{D}\}$$

med

$$\begin{aligned} B = (B_1, \ldots, B_L)^T \quad &\rightarrow \quad \text{Gauss}_L(b; 0, \sigma_B^2 I) \\ g(x) = (g_1(x), \ldots, g_L(x))^T; x \in \mathcal{D} \end{aligned}$$

hvor modelparameter σ_B^2 og funksjonene $g(x)$ er kjente. Anta videre at $\{R(x); x \in \mathcal{D}\}$ er et stasjonært og isotropt Gaussisk stokastisk felt.

b) Er $\{S(x); x \in \mathcal{D}\}$ et Gaussisk stokastisk felt ? Begrunn svaret.

Utled uttrykk for forventningsfunksjonen $\mu_S(x)$, variansfunksjonen $\sigma_S^2(x)$; og den romlige korrelasjonsfunksjonen $\rho_S(x', x'')$ for $\{S(x); x \in \mathcal{D}\}$. Uttrykkene vil avhenge av modelparametrene til $\{R(x); x \in \mathcal{D}\}$.

Betrakt en mengde observasjoner av $\{S(x); x \in \mathcal{D}\}$ i lokasjonene $x^d = (x_1, \ldots, x_n)$ og benevn dem $s(x^d) = (s(x_1), \ldots, s(x_n))$.

c) Betrakt en vilkårlig lokasjon $x_0 \in \mathcal{D}$.

Utled et uttrykk for:

$$Prob\{S(x_0) > s_0 | S(x^d) = s(x^d)\}$$

Oppgave 2 HENDELSES STOKASTISK FELT.

En oste-type inneholder hull som kan modelleres som følger: Hull-sentrene er lokalisert som et homogen Poisson stokastisk felt (tre-dimensjonalt) $\{X_i, i = 1, \ldots, N; \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3\}$ med intensitet λ ($[dm^3]^{-1}$). Hullene er sirkulære med konstant radius r (dm). Herav følger at en oste-bit består av ost med tetthet ρ (g/dm^3) og hull (muligens overlappende) som ikke bidrar noe til vekten.

a) Spesifiser uttrykket for sannsynlighetsfordelingen for antall hull-sentre inne i en oste-bit med volum 1 dm^3.

b) Betrakt en oste-bit med volum 1 dm^3.

Utled et uttrykk for den forventede vekt av denne oste-biten.

Merk at sannsynlighetstetthetsfunksjonen for avstanden fra en vilkårlig lokasjon i oste-biten til nærmeste hull-senter er:

$$f(d) = 4\lambda\pi d^2 \times \exp\{-\lambda\frac{4}{3}\pi d^3\} \ ; d \geq 0$$

c) Betrakt et eksakt sirkulært hull i oste-biten (ingen overlapp med andre hull). Utled et uttrykk for sannsynlighetstetthetsfunksjonen for minste tykkelse av ost mellom dette hullet og et annet hull.

Oppgave 3 MOSAIKK STOKASTISK FELT.

Betrakt et Ising stokastisk felt $L : \{L_u; u \in \mathcal{L_D}\}$ hvor $\mathcal{L_D}$ er et regulært grid over $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$, and $L_u \in \{-1, 1\}$. 'Clique'-systemet består av alle nærmeste naboer av gridnoder og interaksjonsparameteren er β. Gibbs-formuleringen av det stokastiske feltet er:

$$Prob\{L = l\} = const \times \exp\{-\beta \times \sum_{\substack{u,v \in \mathcal{L_D} \\ <u,v>}} l_u l_v\}$$

I det følgende behøver en bare å betrakte interne gridnoder i $\mathcal{L_D}$ - altså kan alle randproblemer ignoreres.

a) Spesifiser Markov-formuleringen for det stokastiske feltet og spesifiser spesielt det tilhørende naboskaps-system $\{\delta(u); u \in \mathcal{L_D}\}$

Observasjoner er tilgjengelige i alle gridnoder $d = \{d_u; u \in \mathcal{L_D}\}$ og likelihood-modellen inneholder glatting:

$$[d_u | L = l] = \frac{1}{5} \sum_{t \in \nu(u)} l_t + e_u$$

med glatte-naboskap $\nu(u)$ bestående av gridnode u og de fire nærmeste gridnodene. Hvis $u = (i, j)$ så er glatte-naboskapet $((i, j), (i-1, j), (i, j-1), (i+1, j), (i, j+1))$, dvs fem gridnoder. Observasjonsfeilene e_u er romlig uavhengige.

b) Utled uttrykket for Markov-formuleringen til posteriori-modellen for, $[L|d]$, og spesifiser spesielt det tilhøende naboskaps-system.