Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Emneansvarlig:
Professor Henning Omre
Faglig kontakt under eksamen:
Professor Jo Eidsvik
(90127472/735 90153)

Eksamen i TMA4250 ROMLIG STATISTIKK

Fredag 24. mai 2013
Tid: 09.00 - 13:00

Hjelpemidler:
- Statistiske tabeller og formler, Tapir
- Godkjent lommekalkulator (HP30S)
- Egetprodusert, håndskrevet gult titte-ark - A5-format

Sensur: Fredag 14. juni 2013

Oppgave 1 KONTINUERLIGE STOKASTISKE FELT.

Betrakt et kontinuerlig stokastisk felt $\{R(x); x \in \mathbb{R}^2\}$, med modelparametre: $E\{R(x)\} = \mu_R \; ; x \in \mathbb{R}^2$ og $\text{Var}\{R(x)\} = \sigma_R^2 \; ; x \in \mathbb{R}^2$. Den romlige isotrope korrelasjonsfunksjonen er $\text{Corr}\{R(x'), R(x'')\} = \rho_R(\tau) \; ; x', x'' \in \mathbb{R}^2$ med $\tau = |x' - x''|$.

a) Spesifiser de eksakte krav til $\rho_R(\tau)$ for at den skal være en gyldig romlig korrelasjonsfunksjon.

Utled uttrykket for tilsvarende variogram funksjon $\gamma_R(\tau) = \frac{1}{2}\text{Var}\{R(x') - R(x'')\}$.

Definer et assosiert kontinuerlig stokastisk felt $\{S(x) = a + R(x) + U(x) \; ; x \in \mathbb{R}^2\}$ hvor a er en konstant. Det kontinuerlige stokastiske feltet $\{U(x) \; ; x \in \mathbb{R}^2\}$ er et hvit-støy felt, uavhengig av $R(x)$, med parametre $E\{U(x)\} = 0$, $\text{Var}\{U(x)\} = \sigma_U^2$ og $\text{Corr}\{U(x'), U(x'')\} = I(x' = x'')$ hvor $I(A)$ er en indikatorfunksjon med verdi 1 når A er sann og 0 ellers.

b) Utled formler for $E\{S(x)\} = \mu_S$, $\text{Var}\{S(x)\} = \sigma_S^2$ samt $\text{Corr}\{S(x'), S(x'')\} = \rho_S(\tau)$ uttrykt ved parametrene til feltene $R(x)$ og $U(x)$.

Utled også formlene for kryss-variansen $\text{Cov}\{R(x), S(x)\} = \sigma_{RS}^2$ samt den romlige kryss-korrelasjonsfunksjonen $\text{Corr}\{R(x'), S(x'')\} = \rho_{RS}(\tau)$.

Betrakt følgende to observasjonsdesign:

$$R^o = (R(x_1^{or}), \ldots, R(x_{nr}^{or})) = (R_1^o, \ldots, R_{nr}^o)$$
$$S^o = (S(x_1^{os}), \ldots, S(x_{ns}^{os})) = (S_1^o, \ldots, S_{ns}^o)$$

Målet er å predikere det stokastiske feltet $\{R(x) \; ; x \in \mathbb{R}^2\}$ i en vilkårlig lokasjon $x_+ \in \mathbb{R}^2$, dvs $R_+ = R(x_+)$. Bruk den lineære prediktoren:

$$\hat{R}_+ = \Sigma_{i=1}^{nr} \alpha_i R_i^o + \Sigma_{j=1}^{ns} \beta_j S_j^o$$

med ukjente vekter $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{nr})$ og $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_{ns})$ som skal bestemmes.

Anta at annen-moments modellparametre, σ_R^2 , σ_U^2 samt $\rho_R(\tau)$ er kjente. Resten av modellparametrene er ukjente.

c) Utled uttrykkene i det minimeringssystem som definerer vektene α og β for minimum varians, lineær, forventningsrett prediktor for R_+. Selve minimeringen behøver ikke å utføres.

Dersom observasjonsdesignene for $R(x)$ og $S(x)$ er identiske, dvs. observasjoner i de samme lokasjonene, kan minimeringssystemet forenkles. Utled minimeringssystemet for dette spesialtilfellet og kommenter løsningen.

Oppgave 2 HENDELSES STOKASTISKE FELT

Betrakt et homogent Poisson stokastisk felt $\{X_i; i = 1, \ldots, N; \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2\}$ definert over området $\mathcal{D} : 5 \times 5[m^2]$ i planet. La intensitetsparametren være $\lambda[m^{-2}]$.

a) Spesifiser sannsynlighetsfordelingen til antall punkt, N , i $\mathcal{D}$.

Hvis en dekker til et bestemt område på $1m^2$ i $\mathcal{D}$, hva er sannsynligheten for at en dekker til eksakt 5 punkter ?

Gitt at det er 5 punkter i det tildekkede området, hva er sannsynlighetsfordelingen for antall punkt i resten av området - altså det området som ikke er tildekket ?

En observatør går over hele området $\mathcal{D}$ for å registrere punkter, men hvert punkt blir kun registrert med sannsynlighet p. Det er altså sannsynlighet $(1-p)$ for at et punkt oversees. Registreringsprosessen ansees som uavhengig fra punkt til punkt.

b) Gitt at antall punkt i $\mathcal{D}$ er $N = n$, hva er sannsynlighetsfordelingen for antall registrerte punkt N^o ?

Uten å kjenne totalantallet N, utled et uttrykk for sannsynlighetsfordelingen for antallet registrerte punkt N^o.

c) Gitt at antallet registrerte punkt er $N^o = n^o$, utled et uttrykk for sannsynlighetsfordelingen for totalt antall punkt N.

Er antallet registrerte punkt N^o og antallet ikke-registrerte punkt $(N - N^o)$ uavhengige? Begrunn svaret.

Kommenter svarene over.

Oppgave 3 MOSAIKK STOKASTISKE FELT

Betrakt et mosaikk stokastisk felt $L : \{L_x \; ; x \in \mathcal{L}_\mathcal{D}\}$ hvor $\mathcal{L}_\mathcal{D}$ er et regulært grid over $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$, og $L_x \in \Omega_l : \{W, G, B\}$. Variablene L_x kan altså tilhøre en av klassene hvit (W), grå (G) eller sort (B) for hver $x \in \mathcal{L}_\mathcal{D}$.

Definer følgende Gibbsformulering for feltet:

$$\text{Prob}\{L = l; \beta = (\beta_W, \beta_G, \beta_B)\} = \text{const}_\beta \times \exp\{\Sigma_{<u,v>} \Sigma_{l_u \in \Omega_l} \beta_{l_u} I(l_u = l_v)\}$$

hvor $< u, v >$ representerer alle nærmeste naboer i gridet $\mathcal{L}_\mathcal{D}$ og $I(A)$ er en indikatorfunksjon som tar verdien 1 når A er sann og verdien 0 ellers. Modellparametrene $\beta = (\beta_W, \beta_G, \beta_B)$ er knyttet til romlig kontinuitet for hver av klassene.

a) Utled den tilhørende Markov-formuleringen for det stokastiske feltet. Vær nøye med notasjonen.

Diskuter de viktigste forskjellene mellom Gibbs- og Markov-formuleringene.

Anta at en realisasjon av feltet er kjent $l^o : \{l^o_x \; ; x \in \mathcal{L}_\mathcal{D}\}$. Denne realisasjonen skal brukes til å estimere modellparametrene $\beta = (\beta_W, \beta_G, \beta_B)$.

b) Diskuter hvordan estimeringen best kan gjøres.

Spesifiser uttrykket for pseudo-likelihood som bør maksimeres for å bestemme β.