Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4250 Romlig Statistikk**

Faglig kontakt under eksamen: Professor Henning Omre

Tlf: 90937848

Eksamensdato: 16. mai 2014

Eksamenstid (fra–til): 09:00-13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C:
Tabeller og Formler i Statistikk, Tapir
NTNU godkjent kalkulator
Personlige, håndskrevne, gule titte-ark - A5-format

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 3

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgave 1 KONTINUERLIGE STOKASTISKE FELT.

Betrakt et kontinuerlig stokastisk felt $\{R(x); x \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2\}$, med modelparametre: $E\{R(x)\} = \mu \; ; x \in \mathbb{R}^2$ og $\text{Var}\{R(x)\} = \sigma^2 \; ; x \in \mathbb{R}^2$. den romlige isotrope korrelasjonsfunksjonen er $\text{Corr}\{R(x'), R(x'')\} = \rho(\tau) \; ; x', x'' \in \mathbb{R}^2$ med $\tau = |x' - x''|$. La $\mathcal{D} : [0,10] \times [0,10] \subset \mathbb{R}^2$.

La forventningen μ være ukjent, mens variansen σ^2 og romlig korrelasjonsfunksjon $\rho(\tau)$ er kjente.

Definer også det romlige integralet over $\mathcal{D}$:

$$R_{\mathcal{D}} = \frac{1}{|\mathcal{D}|} \int_{\mathcal{D}} R(u) du$$

hvor $|\mathcal{D}|$ er arealet til $\mathcal{D}$.

a) Utled uttrykkene for $E\{R_{\mathcal{D}}\}$ og $\text{Var}\{R_{\mathcal{D}}\}$.

Betrakt en vilkårlig lokasjon $x_o \in \mathcal{D}$, og utled et uttrykk for kovariansen $\text{Cov}\{R(x_o), R_{\mathcal{D}}\}$.

La det stokastiske feltet være observert i lokasjonene $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{D}$, det vil si at observasjonene er $[R(x_1), \ldots, R(x_n)]$.

b) Definer den lineære estimatoren for forventning μ:

$$\hat{\mu} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i R(x_i)$$

hvor $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ er ukjente vekter som skal bestemmes.

Utled et uttrykk for den beste lineære forventningsrette estimatoren under kvadratisk tap for μ, med tilhørende estimeringsvarians. Bare minimeringsproblemet som må løses behøver å angis.

c) Definer den lineære prediktoren for det romlige integralet $R_{\mathcal{D}}$:

$$\hat{R}_{\mathcal{D}} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i R(x_i)$$

hvor $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ er ukjente vekter som skal bestemmes.

Utled et uttrykk for den beste lineære forventningrette prediktoren under kvadratisk tap for $R_{\mathcal{D}}$, med tilhørende prediksjonsvarians. Bare minimeringsproblemet som må løses behøver å angis.

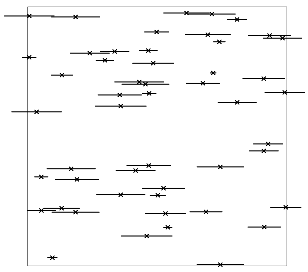
Sammenlikn uttrykkene som er utledet i dette punktet og punkt b).

Oppgave 2 HENDELSES STOKASTISKE FELT.

Betrakt et homogent, merket punkt stokastisk felt $\{(X_i, L_i); i = 1, \ldots, N; \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2\}$ definert over området $\mathcal{D} : [0, 10] \times [0, 10]$ $[m^2] \in \mathbb{R}^2$, som representerer horisontale (parallell til første akse) linje-segmenter med lengde L sentrert i lokasjon X , se Figur 1.

La $\{X_i; i = 1, \ldots, N; \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2\}$ være et homogent Poisson stokastisk felt med intensitetsparameter $\lambda \geq 0$ $[m^{-2}]$, mens linje-segment lengden L har sannsynlighetstetthet $f(l)$. I tillegg, la de tilfeldige variablene X og L være uavhengige.

Merk at linje-segmentene kan krysse den vertikale (parallell til andre akse) randen av området $\mathcal{D}$.



Figur 1: Eksempel på merket punkt stokastisk felt.

Anta først at lengden av linje-segmentene L er konstant lik 2 $[m]$, det vil si at $f(l)$ er en Dirac sannsynlighetstetthet i $l = 2$.

a) Spesifiser et uttrykk for sannsynlighetsfordelingen til antallet linje-segmenter i området $\mathcal{D}$.

Spesifiser et uttrykk for sannsynlighetsfordelingen til antallet linje-segmenter som krysser randen av $\mathcal{D}$.

Spesifiser forventet antall linje-segmenter som krysser randen.

b) Betrakt et spesifikt linje-segment lokalisert sentralt i området $\mathcal{D}$, slik at rand-effekter kan ignoreres.

Utled et uttrykk for sannsynlighetstettheten til den korteste avstand mellom dette spesifike linje-segmentet og et annet linje-segment.

Anta nå at linje-segment lengden er tilfeldig med sannsynlighetstetthet:

$$f(l) = \begin{cases} \frac{1}{2}l & \text{for } 0 < l < 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

c) Utled et uttrykk for sannsynlighetsfordelingen til antall linje-segmenter som krysser randen til området $\mathcal{D}$.

Betrakt et vilkårlig linje-segment som krysser randen til $\mathcal{D}$.

Utled et uttrykk for sannsynlighetstettheten til linje-segment lengden for dette linje-segmentet som krysser randen. Kommenter resultatet.

Oppgave 3 MOSAIKK STOKASTISKE FELT.

Betrakt et mosaikk stokastisk felt $L : \{L_x \,; x \in \mathcal{L}_\mathcal{D}\}$ hvor $\mathcal{L}_\mathcal{D}$ er et regulært grid. med n noder over $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$, og $L_x \in \Omega_l : \{W, B\}$. Det betyr at variablen L_x kan tilhøre en av klassene hvit (W) eller sort (B) for hver $x \in \mathcal{L}_\mathcal{D}$.

Definer følgende Gibbs formulering for feltet:

$$\begin{aligned}\text{Prob}\{L = l; \beta = (\beta_W, \beta_B)\} = \text{const}_\beta \times \exp\{ \quad & \beta_W \times \Sigma_u I(l_u = W) + \beta_B \times \Sigma_u I(l_u = B) \\ & + \tfrac{1}{2} \times \Sigma_{<u,v>} I(l_u = l_v)\}\end{aligned}$$

hvor $u, v \in \mathcal{L}_\mathcal{D}$ og $< u, v >$ representerer alle par av nærmeste naboer i griddet $\mathcal{L}_\mathcal{D}$ og $I(A)$ er en indikatorfunksjon som tar verdien 1 når A er sann og 0 ellers. Parametrene $\beta = (\beta_W, \beta_B)$ er ukjente modellparametre.

a) Presenter en tolking av modellparametrene $\beta = (\beta_W, \beta_B)$.

Demonstrer at Gibbs formuleringen er over-parametrisert og bare er avhengig av $\Delta\beta = (\beta_W - \beta_B)$. Vær nøye med notasjonen.

b) Utled den tilhørende Markov formuleringen som en funksjon av $\Delta\beta = (\beta_W - \beta_B)$. Vær nøye med notasjonen.

Diskuter de viktigste forskjellene mellom Gibbs og Markov formuleringene.